

SÉRIE A N° 1683

N° d'ordre :

2549

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Gérard PETIAU

1^{re} THÈSE. — Contribution à la Théorie des Équations d'Ondes corpusculaires.

2^{me} THÈSE. — Propositions données par la Faculté

Soutenues le 1936 devant la Commission d'examen:

MM. E. BOREL,	Président,
L. DE BROGLIE	} Examineurs.
F. PERRIN	

SÉRIE A N° 1683

N° d'ordre :

2549

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Gérard PETIAU

1^{re} THÈSE. — **Contribution à la Théorie des Équations d'Ondes corpusculaires.**

2^{me} THÈSE. — **Propositions données par la Faculté**

Soutenues le

1936 devant la Commission d'examen :

MM. E. BOREL,	Président,
L. DE BROGLIE	} Examineurs.
F. PERRIN	

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . . M. MOLLIARD.

Doyen C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires</i> .	H. LEBESGUE.	GOURSAT.	DANGEARD.
	A. FERNBACH.	GUILLET.	JANET.
	A. LEDUC.	PÉCHARD.	LESPIEAU.
	Émile PICARD.	FREUNDLER.	MARCHIS.
	Rémy PERRIER.	AUGER.	VESSIOT.
	LÉON BRILLOUIN.	BLAISE.	

PROFESSEURS

G. BERTRAND T	Chimie biologique.	M. JAVILLIER	Chimie biologique.
M. CAULLERY T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	L. JOLEAUD	Paléontologie.
G. URBAIN T	Chimie générale.	ROBERT-LÉVY	Zoologie.
Émile BOREL T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	F. PICARD	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Jean PERRIN T	Chimie physique.	Henri VILLAT T	Mécanique des fluides et applications.
H. ABRAHAM T	Physique.	Ch. JACOB T	Géologie.
E. CARTAN T	Géométrie supérieure.	P. PASCAL T	Chimie minérale.
M. MOLLIARD T	Physiologie végétale.	M. FRÉCHET T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
L. LAPICQUE T	Physiologie générale.	E. ESCLANGON T	Astronomie.
A. COTTON T	Recherches physiques.	M ^{me} RAMART-LUCAS T	Chimie organique.
J. DRACH T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	H. BÉGHIN T	Mécanique physique et expérimentale.
Charles FABRY T	Enseignement de Physique.	Foch	Mécanique expérimentale des fluides.
Charles PÉREZ T	Zoologie.	PAUTHENIER	Physique (P. C. B.).
Léon BERTRAND T	Géologie structurale et géologie appliquée.	DE BROGLIE T	Théories physiques.
E. RABAUD T	Biologie expérimentale.	CHRÉTIEN	Optique appliquée.
M. GUICHARD	Chimie minérale.	P. JOB	Chimie générale.
Paul MONTEL T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.	LABROUSTE	Physique du Globe.
P. WINTREBERT T	Anatomie et histologie comparées.	PRENANT	Zoologie.
L. BLARINGHEM T	Botanique.	VILLEY	Mécanique physique et expérimentale.
O. DUBOSCQ T	Biologie maritime.	BOHN	Zoologie (P. C. B.).
G. JULIA T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	COMBES	Botanique (P. C. B.).
C. MAUGUIN T	Minéralogie.	GARNIER T	Mathématiques générales.
A. MICHEL-LÉVY T	Pétrographie.	PÉRÈS	Mécanique des fluides.
H. BÉNARD T	Mécanique expérimentale des fluides.	HACKSPILL	Chimie (P. C. B.).
A. DENJOY T	Application de l'analyse à la Géométrie.	LAUGIER	Physiologie générale.
L. LUTAUD T	Géographie physique et géologie dynamique.	TOUSSAINT	Technique Aéronautique.
Eugène BLOCH T	Physique théorique et physique céleste.	M. CURIE	Physique (P. C. B.).
G. BRUHAT	Physique.	G. RIBAUD T	Hautes températures.
E. DARMOIS	Enseignement de Physique.	CHAZY T	Mécanique rationnelle.
A. DEBIERNE T	Physique générale et Radio-activité.	GAULT	Chimie (P. C. B.).
A. DUFOUR T	Physique (P. C. B.).	CROZE	Recherches. Physiques.
L. DUNOYER	Optique appliquée.	DUPONT T	Théories chimiques.
A. GUILLIERMOND T	Botanique.	LANQUINE	Géologie.
		VALIRON	Mathématiques générales.
		BARRABÉ	Géologie structurale et géologie appliquée.
		MILLOT	Zoologie (P. C. B.).
		F. PERRIN	Théories physiques.
		VAVON	Chimie organique.
		G. DARMOIS	Calcul des probabilités et Physique mathématique.

Secrétaire A. PACAUD.

Secrétaire honoraire D. TOMBECK.

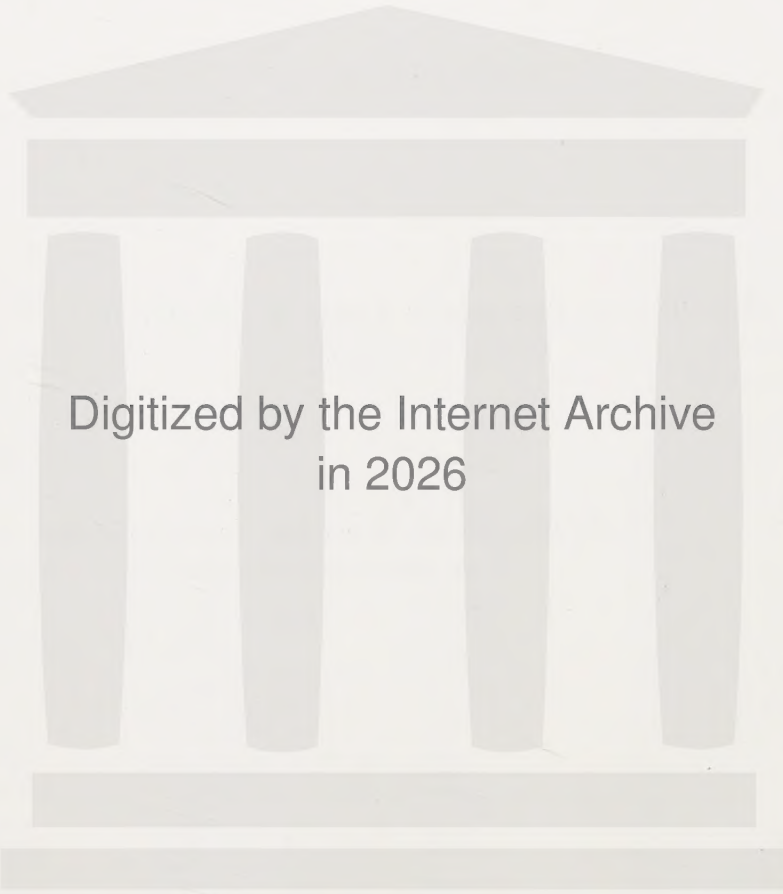


A MES PARENTS

A MONSIEUR LE PROFESSEUR LOUIS DE BROGLIE

MEMBRE DE L'INSTITUT

*En témoignage de ma vive reconnaissance
et de mon profond respect.*



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551407_0070

CONTRIBUTION A LA THÉORIE
DES
ÉQUATIONS D'ONDES CORPUSCULAIRES

PAR
Gérard PETIAU

Extrait des *Mémoires*
publiés par l'Académie royale de Belgique (Classe des Sciences).
Tome XVI (1936).

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS D'ONDES CORPUSCULAIRES

INTRODUCTION

Ce travail a pris son origine dans l'étude de la théorie du photon de M. Louis de Broglie. On sait que, dans celle-ci, le photon est considéré comme résultant de la combinaison d'un corpuscule dont l'équation d'ondes est, à un facteur de masse près, celle de l'électron de Dirac en l'absence de champ extérieur, et de l'anticorpuscule correspondant. Pour obtenir l'équation d'ondes du photon et représenter les opérateurs représentatifs des grandeurs associées, M. Louis de Broglie a été conduit à introduire un formalisme nouveau, au moyen de matrices déduites des matrices de la théorie de Dirac par l'opération de la fusion symétrique. En particulier, ces matrices ne sont pas unitaires. Mises sous forme diagonale, elles y présentent des valeurs zéro, ce qui entraîne pour la grandeur associée à l'opérateur représenté par une telle matrice des états nuls.

En particulier, cette théorie conduit à un opérateur de spin dont les valeurs propres sont $0, \pm \frac{\hbar}{2\pi}$.

M. Louis de Broglie a construit sa théorie du photon en liaison constante avec la théorie de Dirac. Il semblait intéressant de chercher si cette théorie ne pouvait pas se construire d'une manière autonome, c'est-à-dire sans introduire *a priori* le photon comme une combinaison de deux corpuscules, mais, au contraire, comme un corpuscule unique possédant certaines propriétés (en particulier, une masse nulle), en s'appuyant sur des principes analogues à ceux admis par Dirac dans sa théorie de l'électron. Or ces principes se ramènent essentiellement à deux.

Le premier, déduit par Dirac des principes de superposition des états et de symétrie relativiste, conduit à affirmer que l'opérateur d'évolution est linéaire par rapport aux opérateurs

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{c \partial t} \quad \text{et} \quad - \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_p},$$

tandis que le second, plus particulier, établit entre les paramètres W et p , énergie et impulsion d'une onde plane monochromatique, la relation classique

$$W^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4.$$

De ces principes il résulte que l'opérateur d'évolution doit être représenté par un opérateur linéaire et hermitique de la forme

$$S = \sum_{\mu} \Gamma_{\mu} p_{\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

tel que

$$S^2 = -m_0^2 c^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2.$$

Pour construire une théorie plus générale que la théorie de Dirac, s'appliquant au corpuscule de masse nulle (neutrino, photon), nous avons, tout en conservant le principe de linéarité de l'opérateur S , généralisé le second principe en admet-

tant que l'opérateur d'évolution S possède des valeurs propres zéro et par suite satisfait à l'équation

$$S^3 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) S.$$

La recherche de cet opérateur et l'étude des propriétés qui en résultent, pour les grandeurs attachées aux différents corpuscules dont cet opérateur peut servir à former l'équation d'ondes, constituent la plus grande partie de ce travail.

Dans le premier chapitre, rappelant brièvement les principes qui conduisent à l'équation de Dirac, j'établis les principes de la théorie du corpuscule dont la masse propre est susceptible de prendre les valeurs $\pm im_0c$ et 0. La linéarisation de l'équation opératorielle

$$S^3 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) S = 0$$

nous conduit à des relations entre matrices, relations qui se simplifient en se ramenant à deux cas correspondant à des propriétés différentes pour les corpuscules représentés, notamment à des spins différents. Le premier cas correspond aux relations

$$\Gamma_\mu^2 = \Gamma_\nu, \quad \Gamma_\mu = \Gamma_\mu \Gamma_\nu^2 + \Gamma_\nu^2 \Gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\lambda + \Gamma_\lambda \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 0,$$

tandis que le second cas correspond à

$$\Gamma_\mu^2 = \Gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu = \Gamma_\nu^2 \Gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 0.$$

Dans le deuxième chapitre, je considère le corpuscule dont l'équation d'ondes est

$$\sum_\mu \Gamma_\mu p_\mu \psi = \lambda \psi, \quad \lambda = +im_0c, \quad -im_0c, \quad 0,$$

les Γ_μ satisfaisant aux relations du premier cas.

Après avoir introduit deux méthodes de séparation de la variable de temps des variables d'espace, je montre que, dans

un changement de système de référence, représenté par une transformation de Lorentz, on peut conserver à la fois les formes de l'équation d'ondes, de son équation adjointe et de l'équation de conservation qui s'en déduit pour le quadri-vecteur densité-courant, moyennant une substitution linéaire sur les fonctions d'ondes.

Je montre ensuite que l'on peut adjoindre à l'équation d'ondes $S\psi = \lambda\psi$ une deuxième équation $S'\psi = \lambda\psi$, telle que les opérateurs S et S' soient liés par les relations

$$S^2 + S'^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2; \quad SS' = 0.$$

J'étudie les principales grandeurs que l'on peut former par combinaison des matrices qui entrent dans les opérateurs S et S' . En particulier, on voit que le corpuscule considéré possède un spin dont les valeurs propres sont $0, \pm \frac{\hbar}{2\pi}$ et qu'on peut lui associer deux tenseurs symétriques et deux tenseurs antisymétriques du second ordre.

Dans le troisième chapitre, j'examine, suivant une marche analogue, les propriétés du corpuscule dont les matrices de l'opérateur S satisfont à notre deuxième système de relations distingué précédemment. Je montre que le spin de ce corpuscule possède des valeurs propres $0, \pm \frac{\hbar}{4\pi}$.

L'étude faite dans les chapitres II et III s'appuie uniquement sur des relations entre matrices, sans faire intervenir de déterminations particulières pour celles-ci, dont le nombre de lignes et de colonnes n'est pas précisé.

Dans le quatrième chapitre, j'étudie un système particulier de représentation pour le corpuscule du premier cas au moyen de matrices à 16 lignes et 16 colonnes obtenues à partir des matrices de Dirac, par l'opération de fusion symétrique dans

le cas de l'opérateur S , de fusion antisymétrique pour l'opérateur S' .

Toutefois, malgré le rapprochement des formalismes, le cas examiné est distinct du cas du photon de Louis de Broglie. Je montre d'ailleurs, après avoir résolu directement le système des équations d'ondes dans le cas d'une solution onde plane monochromatique, que, si la masse est supposée différente de zéro, cette solution peut être considérée comme le produit des solutions correspondantes de deux équations de Dirac. Dans une représentation par un système, le corpuscule considéré correspondrait au couplage de deux corpuscules, tandis que le photon est considéré comme résultant du couplage entre un corpuscule et un anticorpuscule. Nous trouvons ainsi une solution onde plane dépendant de quatre paramètres arbitraires lorsque la masse est non nulle, la représentation de la solution exigeant huit paramètres lorsque la masse est nulle. Ces solutions nous permettent d'étudier les densités de valeur moyenne des principales grandeurs représentées par les matrices de notre théorie.

Dans le cinquième chapitre, je construis deux représentations des matrices du corpuscule du second cas examinées au chapitre III. La première de ces représentations est obtenue au moyen de matrices du sixième rang, la seconde au moyen de matrices du huitième rang.

Cette deuxième représentation est particulièrement intéressante, car les solutions de l'équation d'ondes correspondant au cas de masse non nulle sont identiques dans tous les cas aux solutions de l'équation de Dirac, tandis que lorsque la masse est nulle, une dégénérescence supplémentaire fait dépendre la solution onde plane de quatre constantes arbitraires au lieu de deux dans le cas de masse non nulle.

Dans le sixième chapitre, j'étudie plus particulièrement les relations existant entre les matrices que l'on peut former au moyen des combinaisons par fusion symétrique ou antisymétrique des seize matrices du système de Dirac, au moyen de ces seize mêmes matrices.

Entin, dans le septième chapitre, je reprends l'étude de l'introduction de la variable de spin et je montre notamment que pour que le spin d'un corpuscule possède des valeurs propres 0 et $\pm \frac{h}{2\pi}$, sa variable de spin doit satisfaire aux relations de notre premier cas. J'examine ensuite, au moyen de deux représentations de cette variable, la théorie analogue de la théorie approchée donnée par Pauli dans le cas du spin $\pm \frac{h}{4\pi}$ de l'électron.

Je remercie M. le Professeur Louis de Broglie pour la bienveillante attention qu'il a accordée à ce travail.

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES DE LA THEORIE DU CORPUSCULE A MASSE DE VALEUR PROPRE NULLE

1. *L'équation d'ondes relativiste du corpuscule à masse non nulle.* — L'équation d'ondes d'un corpuscule dont les grandeurs énergie et impulsion sont liées par la relation classique

$$(1) \quad W^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

doit être d'une forme telle que, si l'on considère une fonction d'ondes, solution représentée par une onde plane monochromatique

$$(2) \quad \psi = A e^{\frac{i\pi}{h} (Wt - p_x x - p_y y - p_z z)},$$

la relation (1) entre son énergie, son impulsion et la masse du corpuscule soit vérifiée.

Par suite, la fonction ψ , solution de l'équation d'ondes, doit satisfaire à l'équation

$$(3) \quad [p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2] \psi = -m_0^2 c^2 \psi$$

en introduisant les opérateurs

$$p_\mu = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad \text{et} \quad x_4 = i c t.$$

D'autre part, les principes généraux de la mécanique quantique indiquant que l'équation d'ondes doit être linéaire par rapport au temps et le principe de symétrie relativiste entre coordonnées de temps et coordonnées d'espace demandant que celles-ci soient introduites de la même façon, l'équation d'ondes doit être représentée par un opérateur linéaire en p_x, p_y, p_z, p_4 , soit S , tel que

$$(4) \quad S\psi = \lambda\psi.$$

L'équation (3), devant être une conséquence de l'équation (4), s'en déduira par itération; d'où

$$S^2\psi = \lambda^2\psi.$$

Par comparaison avec (3), S et λ satisfont aux relations

$$S^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 \\ \lambda^2 = -m_0^2 c^2.$$

Nous arrivons au même résultat si nous posons

$$S\psi = -\lambda\psi,$$

ce qui nous montre que les principes posés pour déterminer S conduisent à deux équations d'ondes

$$S\psi = \lambda\psi \quad \text{ou} \quad S\psi = -\lambda\psi.$$

Ces considérations nous amènent à interpréter l'équation (3).

Nous considérerons celle-ci comme l'équation déterminant les valeurs propres de l'opérateur S lorsque ψ est fonction propre.

Par suite, pour une onde plane monochromatique, ces valeurs propres seront les nombres

$$\lambda = \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}$$

les p étant ici des nombres.

2. Généralisation au cas où la masse peut être nulle. —

Nous allons utiliser cette interprétation pour construire une équation d'ondes correspondant à un corpuscule qui, en plus des états précédents

$$\lambda = \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}$$

admet un état de masse propre

$$\lambda = 0.$$

L'équation caractéristique correspondant à l'opérateur S devra être, dans le cas d'une solution représentée par une

onde plane monochromatique, la conséquence d'une équation satisfaite par ψ , de la forme

$$f(S)\psi = 0,$$

qui se ramène à $f(S) = 0$, les p étant cette fois des nombres.

Si nous voulons que les racines de $f(S)$ soient

$$0, \quad \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2},$$

nous aurons

$$(6) \quad f(S) = S^3 - S[p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2] = 0;$$

d'où nous déduirons *une équation d'ondes du troisième ordre*

$$\{S^3 - S(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2)\}\psi = 0,$$

les p étant ici des opérateurs.

Cette équation devra être une conséquence de l'une quelconque des équations d'ondes du premier ordre

$$S\psi = \lambda\psi, \quad S\psi = 0, \quad S\psi = -\lambda\psi$$

où

$$\lambda = im_0c.$$

D'autre part, nous avons vu que S devait être un opérateur linéaire et hermitique.

Nous pouvons donc poser

$$(8) \quad S = \Gamma_4 p_4 + \Gamma_1 p_1 + \Gamma_2 p_2 + \Gamma_3 p_3$$

les p_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) formant ici un système de matrices hermitiques ($x_4 = ict$ est considéré comme une variable réelle).

Nous écrirons

$$S = \sum_{\mu} \Gamma_{\mu} p_{\mu}, \quad \square = \sum_{\mu} p_{\mu}^2$$

Nous allons chercher les relations liant les Γ_{μ} en écrivant que l'on a

$$S^3 - S\square \equiv 0,$$

en identifiant les coefficients des p_{μ} .

On a

$$\begin{aligned} S \square &= \sum_{\mu} \Gamma_{\mu} p_{\mu}^3 + \sum_{\mu, \nu} \Gamma_{\mu} p_{\mu} p_{\nu}^2 \\ S^2 &= \sum_{\mu} \Gamma_{\mu}^2 p_{\mu}^2 + \sum_{\mu, \nu} (\Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu}) p_{\mu} p_{\nu} \\ S^3 &= \sum_{\mu} \Gamma_{\mu}^3 p_{\mu}^3 + \sum_{\mu, \nu} \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu}^2 p_{\nu} p_{\mu}^2 + \sum_{\mu, \nu} \Gamma_{\mu} (\Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu}) p_{\mu}^2 p_{\nu} \\ &+ \sum_{\mu, \nu, \lambda} \{ \Gamma_{\lambda} (\Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu}) + \Gamma_{\mu} (\Gamma_{\nu} \Gamma_{\lambda} + \Gamma_{\lambda} \Gamma_{\nu}) + \Gamma_{\nu} (\Gamma_{\lambda} \Gamma_{\mu} + \Gamma_{\mu} \Gamma_{\lambda}) \} p_{\mu} p_{\nu} p_{\lambda}. \end{aligned}$$

Par identification, les p_{μ} étant supposés non nuls, nous en tirons les relations

$$(9) \quad \begin{cases} (a) & \Gamma_{\mu} = \Gamma_{\mu}^3 \\ (b) & \Gamma_{\nu} = \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu}^2 + \Gamma_{\nu} (\Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} + \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu}) \\ (c) \quad 0 &= \Gamma_{\nu} (\Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} + \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu}) + \Gamma_{\nu} (\Gamma_{\lambda} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\lambda}) + \Gamma_{\lambda} (\Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} + \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu}). \end{cases}$$

3. Séparation de deux cas particuliers. — Nous allons maintenant montrer que de ce système (9) on peut tirer deux cas particuliers plus simples correspondant à des corpuscules possédant des propriétés distinctes que nous étudierons ultérieurement.

La relation (a) doit être conservée dans tous les cas, car elle représente l'équation caractéristique des matrices Γ_{μ} qui, par suite, possèdent les valeurs propres

$$0, \quad -1, \quad -1.$$

Nous obtenons alors les deux systèmes

$$(I) \quad \begin{cases} \Gamma_{\nu} = \Gamma_{\mu}^3 \\ \Gamma_{\mu} = \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu}^2 + \Gamma_{\nu}^2 \Gamma_{\mu} \\ \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} \Gamma_{\lambda} + \Gamma_{\lambda} \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} = 0 \end{cases}$$

et

$$(II) \quad \begin{cases} \Gamma_{\mu} = \Gamma_{\mu}^3 \\ \Gamma_{\mu} = \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu}^2 + \Gamma_{\nu}^2 \Gamma_{\mu} \\ \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} = 0. \end{cases}$$

Le système (I) vérifie bien la relation (9_b), car, par multiplication à droite et à gauche par Γ_{ν} , sa deuxième relation donne

$$\Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} = 0.$$

Nous savons ⁽¹⁾ qu'il existe des systèmes de quatre matrices satisfaisant aux relations du système (I). Ce sont les matrices utilisées par M. Louis de Broglie dans sa théorie du photon.

Nous montrerons ultérieurement que l'on peut également construire des systèmes de quatre matrices satisfaisant aux relations (II).

Ces nombres Γ_μ , quoique anticommutants, sont distincts des nombres utilisés en théorie de Dirac, car nous n'avons pas ici $\Gamma_\mu^2 = 1$.

Les Γ_μ étant déterminés par ces relations, nous aurons dans les deux cas (I) et (II) à étudier le corpuscule dont l'équation d'ondes s'écrit

$$\left[\Gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\pi i}{h} \lambda \right] \psi = 0,$$

λ prenant les valeurs $+im_0c$, $-im_0c$, 0 . Nous verrons notamment que dans le cas (I) notre corpuscule possède un spin de valeurs propres

$$\pm \frac{h}{2\pi} \text{ et } 0 \quad \text{et} \quad \pm \frac{h}{4\pi} \text{ et } 0$$

dans le cas (II).

Cette étude va faire l'objet des chapitres suivants.

⁽¹⁾ Voir Bibliographie (III-7).

CHAPITRE II

ETUDE DU CORPUSCULE DU PREMIER TYPE

Dans ce chapitre, nous allons étudier la représentation d'un corpuscule par l'équation d'ondes

$$(1) \quad \left[\Gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{2\pi i}{h} \lambda \right] \psi = 0,$$

$$\lambda = \pm i m_0 c, \quad \lambda = 0,$$

les Γ étant liés par le système des relations

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad \Gamma_\mu^3 = \Gamma_\mu \\ b) \quad \Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu^2 = \Gamma_\nu \\ c) \quad \Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\lambda + \Gamma_\lambda \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 0. \end{array} \right.$$

1. *Séparation de la variable de temps.* — Si nous revenons des variables d'univers x_1, x_2, x_3, x_4 à des variables d'espace-temps x, y, z, t , l'équation (1) s'écrit

$$(3) \quad i\Gamma_4 \frac{\partial \psi}{c \partial t} = \left[\Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\pi i}{h} \lambda \right] \psi.$$

Nous avons ainsi un opérateur d'évolution qui n'est plus hermitique. Pour le rendre hermitique à nouveau, deux procédés s'offrent à nous :

1° Multiplier, à gauche, les deux membres de l'équation (3) par une matrice hermitique A_0 telle que

$$(4) \quad A_0^2 = 1, \quad A_0 \Gamma_\mu = \Gamma_\mu A_0, \quad A_0 \Gamma_\mu + \Gamma_\mu A_0 = 0$$

$$\mu = 1, 2, 3.$$

2° Multiplier, à gauche, les deux membres de l'équation (2) par une matrice hermitique B_0 telle que

$$(5) \quad B_0^2 = 1, \quad B_0 \Gamma_4 + \Gamma_4 B_0 = 0, \quad B_0 \Gamma_\mu = \Gamma_\mu B_0.$$

Nous allons étudier successivement ces deux procédés de séparation.

2. Séparation du premier type. — Les propriétés des matrices Γ_μ nous permettent de trouver une matrice hermitique A_0 telle que l'on ait

$$(6) \quad \begin{cases} \Gamma_4 A_0 = A_0 \Gamma_4 = I_4 & A_0^2 = 1 \\ A_0 \Gamma_p + \Gamma_p A_0 = 0 & p = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Nous montrerons ultérieurement comment on construit une telle matrice A_0 .

Si nous multiplions maintenant l'équation d'ondes (3) par $-iA_0$, nous obtenons

$$A_0 \Gamma_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ \Sigma_p \left(-i A_0 \Gamma_p \frac{\partial}{\partial x_p} \right) + \frac{2\pi}{h} \lambda A_0 \right\} \psi.$$

Posant alors

$$(7) \quad \begin{cases} A_0 \Gamma_4 = \Gamma_4 A_0 = A_4 \\ -i A_0 \Gamma_p = A_p \end{cases}$$

et considérant le cas où λ a la valeur $+im_0c$, nous obtenons l'équation d'ondes

$$(8) \quad A_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[A_4 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c A_0 \right] \psi,$$

dans laquelle les A sont tous des matrices hermitiques.

On voit facilement au moyen des relations (6), (7) que les A_μ satisfont au système

$$(9) \quad \begin{cases} A_\mu^3 = A_\mu \\ A_\mu^2 A_\nu + A_\nu A_\mu^2 = A_\nu \\ A_\mu A_\nu A_\lambda + A_\lambda A_\nu A_\mu = 0. \end{cases}$$

Le rôle de séparation que nous faisons jouer ici à A_0 est identique à celui que l'on fait jouer à la matrice α_4 en théorie de Dirac pour séparer la variable temporelle de l'équation d'ondes de l'électron prise sous la forme de von Neumann et la mettre sous la forme de Dirac.

Mais ici, A_0 n'est pas une matrice du système de Γ_μ , car la multiplication par une matrice de ce système n'est pas une opération réversible, les Γ_μ ne possédant pas d'inverses.

Nous sommes donc amené à considérer l'équation (8) comme l'équation d'évolution de la fonction ψ au cours du temps. Toutefois, les matrices A , de même que les Γ , admettant des valeurs propres 0; il en résulte que si nous considérons une représentation de Γ dans laquelle Γ_4 est diagonale, A_4 sera diagonale, et seuls les ψ pour lesquels la valeur correspondante de A_4 est différente de zéro évolueront au cours du temps.

Nous reviendrons plus tard sur ce point en définissant une équation d'évolution pour les ψ tels que $A_4\psi = 0$.

3. Quadrivecteur densité-courant. — Les A étant hermitiques, nous pouvons, à partir de l'équation

$$(8) \quad \frac{1}{c} A_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c A_0 \right] \psi,$$

former l'équation conjuguée transposée

$$(10) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} A_4 = \frac{\partial \psi^*}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \psi^*}{\partial y} A_2 + \frac{\partial \psi^*}{\partial z} A_3 - \frac{2\pi i}{h} m_0 c \psi^* A_0.$$

De ces deux équations, nous déduisons l'équation de conservation

$$(11) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\psi^* A_4 \psi] - \sum_p \frac{\partial}{\partial x_p} [\psi^* A_p \psi] = 0,$$

analogue à l'équation de continuité hydrodynamique

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{\rho v} = 0,$$

si nous posons

$$\rho = \psi^* A_4 \psi \quad (\vec{\rho v})_p = -c \psi^* A_p \psi.$$

Si nous utilisons les définitions des A_p données en (7), l'équation (10) s'écrit

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} i A_0 \Gamma_4 + \sum_p \frac{\partial \psi^*}{\partial x_p} i A_0 \Gamma_p + \frac{2\pi i}{h} m_0 c \psi^* A_0.$$

Revenant à la variable $\tau = ict$ et posant

$$\psi^+ = i \psi^* A_0$$

nous obtenons l'équation

$$(12) \quad \frac{\partial \psi^+}{\partial \tau} \Gamma_4 + \sum_p \frac{\partial \psi^+}{\partial x_p} \Gamma_p + \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi^+ = 0,$$

qui, avec l'équation

$$(1) \quad \Gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \sum_p \Gamma_p \frac{\partial \psi}{\partial x_p} - \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi = 0,$$

conduit à l'équation de conservation

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} [\psi^+ \Gamma_4 \psi] + \sum_p \frac{\partial}{\partial x_p} [\psi^+ \Gamma_p \psi] = 0$$

pour le quadrivecteur d'univers

$$s_\mu = \psi^+ \Gamma_\mu \psi.$$

Si nous exprimons maintenant les grandeurs ρ et $(\rho v)_\mu$ au moyen de ψ^+ et ψ , on obtient, en utilisant la relation

$$\begin{aligned} \psi^* &= -i\psi^+ \Lambda_0, \\ \rho &= \psi^* \Lambda_4 \psi = -i\psi^+ \Lambda_0 \Lambda_4 \psi = -i\psi^+ \Gamma_4 \psi \\ \rho v_\mu &= c\psi^* \Lambda_\mu \psi = c\psi^+ i\Lambda_0 \Lambda_\mu \psi = c\psi^+ \Gamma_\mu \psi. \end{aligned}$$

Par suite, l'équation de conservation du quadrivecteur s_μ est bien identique à l'équation (11).

L'équation (12) peut donc s'interpréter comme l'équation d'univers adjointe de l'équation (1).

Nous interpréterons également ρ comme la densité de présence de notre corpuscule dans l'élément $dx dy dz$ et $(\rho v)_\mu$ comme la composante p du courant de probabilité.

4. Invariance relativiste de l'équation d'ondes. — Nous allons maintenant étudier comment se transforment les équations (1) et (12) dans une transformation de Lorentz, ce qui nous permettra de montrer que lorsque celles-ci sont invariantes, s_μ a effectivement la variance relativiste d'un quadrivecteur.

Considérons une transformation de Lorentz de la forme la

plus générale, représentée par une rotation du système des axes OX_μ que nous écrirons sous la forme

$$(15) \quad x'_\mu = \sum_\nu O_{\mu\nu} x_\nu$$

avec

$$O_{\mu\nu} O_{\nu\zeta} = \delta_{\mu\zeta}.$$

Nous allons montrer que dans une telle transformation l'équation

$$(16) \quad \left[\sum_\mu \Gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{2\pi}{h} m_0 c \right] \psi = 0 \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

se transforme de telle sorte que l'on ait

$$(17) \quad \left[\sum_\mu \Gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} - \frac{2\pi}{h} m_0 c \right] \psi' = 0,$$

où

$$\psi' = S \psi,$$

S étant ici une substitution linéaire dépendant des paramètres de la rotation, tandis que

$$(18) \quad \sum_\mu \left[\frac{\partial}{\partial x'_\mu} \psi' + \Gamma_\mu \right] + \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi' = 0$$

se transforme en

$$(19) \quad \sum_\nu \psi' + \Gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} + \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi' = 0$$

avec

$$\psi'^+ = \psi^+ S^{-1}$$

Si nous supposons qu'il existe une telle transformation S, en revenant de l'équation (17) à l'équation (16), nous aurons

$$\left\{ \sum_{\mu,\nu} \left[\Gamma_\mu O_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right] \right\} S \psi - \frac{2\pi}{h} m_0 c S \psi = 0,$$

et de (19) à (18)

$$\left\{ \sum_{\mu,\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi^+ S^{-1} O_{\mu\nu} \Gamma_\mu \right] \right\} + \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi^+ S^{-1} = 0.$$

Si nous multiplions ces deux équations par S^{-1} et S , nous aurons

$$(20) \quad \left[\sum_{\mu\nu} S^{-1} \Gamma_{\mu} S O_{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}} \right] - \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi = 0$$

et

$$(21) \quad \left[\sum_{\mu\nu} \frac{\partial \psi^+}{\partial x_{\nu}} S^{-1} \Gamma_{\mu} S O_{\mu\nu} \right] + \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi^+ = 0,$$

ce qui nous donne l'équation de continuité

$$(22) \quad \sum_{\mu\nu} O_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} [\psi^+ S^{-1} \Gamma_{\mu} S \psi] = 0.$$

Les équations (20), (21), (22) se ramèneront aux équations (16), (18) et (13) si l'on peut trouver une transformation S telle que l'on ait

$$S^{-1} \Gamma_{\mu} S O_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu}$$

ou encore

$$(23) \quad S^{-1} \Gamma_{\mu} S = O_{\mu\nu} \Gamma_{\nu}.$$

Il nous faut maintenant montrer qu'il existe effectivement une transformation S solution de cette équation.

Pour cela, nous allons considérer la transformation infinitésimale du groupe des rotations, exprimée sous la forme

$$x'_{\nu} = x_{\nu} + \sum_{\mu} \varepsilon_{\mu\nu} x_{\mu}$$

avec

$$\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}.$$

La transformation infinitésimale S correspondante, développée en série par rapport aux $\varepsilon_{\mu\nu}$ s'écrit

$$(24) \quad S = I + \frac{1}{2} \sum_{(\mu\nu)} \varepsilon_{(\mu\nu)} T_{(\mu\nu)}.$$

En raison de $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$, on doit avoir

$$T_{(\mu\nu)} = -T_{(\nu\mu)}$$

et

$$(25) \quad S^{-1} = I - \frac{1}{2} \sum_{(\mu\nu)} \varepsilon_{(\mu\nu)} T_{(\mu\nu)}.$$

Reportant ces valeurs de S et S^{-1} dans l'équation (23), on en déduit

$$\Gamma_{\lambda} \frac{1}{2} \varepsilon_{(\mu\nu)} T_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} \varepsilon_{(\mu\nu)} T_{(\mu\nu)} \Gamma_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda\nu} \Gamma_{\nu}$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda} \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} T_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} T_{(\mu\nu)} \Gamma_{\lambda} &= \varepsilon_{\lambda\nu} \Gamma_{\nu} \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{\lambda\nu} \Gamma_{\nu} + \varepsilon_{\lambda\mu} \Gamma_{\mu}) - \frac{1}{2} [\varepsilon_{\lambda\nu} \Gamma_{\nu} - \varepsilon_{\mu\lambda} \Gamma_{\mu}] \\ &= \frac{1}{2} [\varepsilon_{\mu\nu} \delta_{\mu\lambda} \Gamma_{\nu} - \varepsilon_{\mu\nu} \delta_{\lambda\nu} \Gamma_{\mu}] = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} [\delta_{\mu\lambda} \Gamma_{\nu} - \delta_{\lambda\nu} \Gamma_{\mu}], \end{aligned}$$

et en égalant les termes en $\varepsilon_{\mu\nu}$

$$(26) \quad \Gamma_{\lambda} T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \Gamma_{\lambda} = \delta_{\mu\lambda} \Gamma_{\nu} - \delta_{\lambda\nu} \Gamma_{\mu}.$$

Posant

$$(28) \quad \begin{cases} T_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} - \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} & \text{pour } \mu \neq \nu \\ T_{\mu\mu} = 0, \end{cases}$$

l'équation (26) est satisfaite, car on a

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \quad \lambda \neq \mu \neq \nu \\ \Gamma_{\lambda} T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \Gamma_{\lambda} &= \Gamma_{\lambda} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} - \Gamma_{\lambda} \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} - \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} \Gamma_{\lambda} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\lambda} = 0 \\ 2^{\circ} \quad \lambda = \mu \neq \nu \\ \Gamma_{\mu} T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \Gamma_{\mu} &= \Gamma_{\mu}^2 \Gamma_{\nu} - \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} - \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu}^2 = \Gamma_{\nu}. \end{aligned}$$

La transformation infinitésimale S correspondant à la rotation infinitésimale

$$x'_{\mu} = 1 + \sum_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu} x_{\nu}$$

s'écrit donc

$$(29) \quad S = 1 + \frac{1}{2} \sum_{(\mu\nu)} \varepsilon_{(\mu\nu)} [\Gamma^{\mu} \Gamma^{\nu} - \Gamma^{\nu} \Gamma^{\mu}].$$

L'existence de cette transformation montre l'invariance de forme des équations (16), (18) et (13) dans le changement de coordonnées le plus général, moyennant une transformation sur les ψ .

Connaissant cette transformation (29), nous sommes à même

d'étudier les variances des grandeurs $\psi^\dagger \mathfrak{R} \psi$ ou $\psi^* \mathfrak{R} \psi$, $\mathfrak{R}$ étant un opérateur formé à partir des Γ .

Pour cela, à la transformation subie par les ψ nous substituerons une transformation sur les Γ que nous étudierons au moyen de la transformation (29).

Mais nous introduisons ainsi dans le passage des ψ^* au $\psi^\dagger$ la matrice A_0 ; il nous faut examiner comment se transforme cette matrice.

Utilisant l'expression (29), nous avons

$$\begin{aligned} S^{-1} A_0 S &= \left\{ I - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} [\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu] \right\} A_0 \left\{ I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} [\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu] \right\} \\ &= A_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \{ A_0 [\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu] - [\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu] A_0 \} \end{aligned}$$

Si μ et ν sont $\neq 4$, on a $A_0 \Gamma_\mu \Gamma_\nu = \Gamma_\mu \Gamma_\nu A_0$ et par suite

$$(30) \quad S^{-1} A_0 S = A_0.$$

A_0 est donc un invariant pour les transformations d'espace.

Si $\mu = 4$, $\nu \neq 4$, en utilisant les relations

$$A_0 \Gamma_\nu + \Gamma_\nu A_0 = 0 \quad A_0 \Gamma_4 = \Gamma_4$$

on a

$$(31) \quad S^{-1} A_0 S = A_0 + \varepsilon_{4\nu} [\Gamma_4 \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_4].$$

A_0 se transforme donc comme la composante 44 d'un tenseur symétrique du deuxième ordre.

Nous allons maintenant revenir sur le deuxième procédé de séparation du temps que nous avons indiqué précédemment.

5. Étude du deuxième mode de séparation du temps. —

Nous avons vu que nous pouvions rendre hermitiques les opérateurs des deux membres de l'équation d'ondes

$$\frac{1}{c} i \Gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + x \lambda \right) \psi$$

en multipliant celle-ci à gauche par une matrice B_0 telle que

$$B_0^2 = 1, \quad B_0 \Gamma_4 + \Gamma_4 B_0 = 0 \quad B_0 \Gamma_\nu = \Gamma_\nu B_0.$$

(Remarquons ici que si Γ_4 est diagonale, B_0 ne peut l'être et que par suite B_4 , que nous allons définir, n'est pas diagonale).

Si nous posons alors

$$i B_0 \Gamma_4 = B_4, \quad B_0 \Gamma_p = B_p,$$

nous obtenons l'équation d'évolution

$$(32) \quad B_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\sum_p B_p \frac{\partial}{\partial x_p} - \frac{2\pi}{h} m_0 c B_0 \right) \psi,$$

$p = 1, 2, 3$

dans laquelle les B sont tous hermitiques.

L'équation conjuguée transposée de (32) s'écrit

$$(33) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} B_4 = \sum_p \frac{\partial \psi^*}{\partial x_p} B_p - \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi^* B_0$$

d'où l'on déduit la relation entre grandeurs

$$(34) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* B_4 \psi) - \sum_p \frac{\partial}{\partial x_p} (\psi^* B_p \psi) = - \frac{4\pi}{h} m_0 c \psi^* B_0 \psi.$$

De l'équation (33) nous déduisons

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} B_0 \Gamma_4 + \sum_p \frac{\partial \psi^*}{\partial x_p} B_0 \Gamma_p - \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi^* B_0 = 0.$$

Si nous posons alors

$$\bar{\psi}^+ = \psi^* B_0$$

nous obtenons l'équation d'univers

$$(35) \quad \frac{\partial \bar{\psi}^+}{\partial \tau} \Gamma_4 + \sum_p \frac{\partial \bar{\psi}^+}{\partial x_p} \Gamma_p - \frac{2\pi}{h} m_0 c \bar{\psi}^+ = 0,$$

qui, avec l'équation

$$(36) \quad \Gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \sum_p \Gamma_p \frac{\partial \psi}{\partial x_p} - \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi = 0,$$

donne la relation entre grandeurs d'univers

$$(37) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} [\bar{\psi}^+ \Gamma_4 \psi] + \sum_p \frac{\partial}{\partial x_p} [\bar{\psi}^+ \Gamma_p \psi] = - \frac{4\pi}{h} m_0 c \bar{\psi}^+ \psi$$

correspondant à la relation (34).

Si nous cherchons à conserver dans une transformation de Lorentz la forme des équations (35), (36) et (37) moyennant une substitution S sur ψ et S^{-1} sur $\bar{\psi}^+$, nous sommes conduit à l'équation

$$S^{-1} \Gamma^\mu S = O_{\mu\nu} \Gamma^\nu$$

qui est précisément l'équation que nous avons déjà rencontrée pour S dans le premier cas.

6. Grandeurs attachées au corpuscule. — Nous sommes maintenant en mesure d'étudier les grandeurs attachées à notre corpuscule.

A un opérateur $\mathfrak{R}$ correspondront deux grandeurs d'univers

$$\psi^+ \mathfrak{R} \psi \quad \text{et} \quad \bar{\psi}^+ \mathfrak{R} \psi$$

qui auront la même variance relativiste, mais qui conduiront à deux grandeurs différentes pour les densités de valeur moyenne correspondantes dans l'espace-temps, car nous aurons, d'après

$$\begin{aligned} \psi^+ &= i \psi^* A_0 & \bar{\psi}^+ &= \psi^* B_0 \\ \psi^+ \mathfrak{R} \psi &= i \psi^* A_0 \mathfrak{R} \psi \\ \psi^* \mathfrak{R} \psi &= \psi^* B_0 \mathfrak{R} \psi \end{aligned}$$

A_0 et B_0 ne pouvant, ainsi que nous le verrons plus loin, que commuter ou anticommutter avec $\mathfrak{R}$, les opérateurs $i A_0 \mathfrak{R}$ et $B_0 \mathfrak{R}$ pourrons toujours, lorsqu'ils ne le sont pas, être rendus hermitiques par l'adjonction d'un facteur i .

Nous voyons ainsi que nous pouvons construire deux invariants d'univers

$$I_1 = -i \psi^+ \psi \quad I_2 = \bar{\psi}^+ \psi,$$

car

$$\begin{aligned} I_1' &= -i \psi'^+ \psi' = -i \psi^+ S^{-1} S \psi = I_1 \\ I_2' &= \bar{\psi}'^+ \psi' = \bar{\psi}^+ S^{-1} S \psi = I_2 \end{aligned}$$

auxquels correspondent les deux invariants d'espace-temps

$$\begin{aligned} I_1 &= -i \psi^+ \psi = \psi^* A_0 \psi \\ I_2 &= \bar{\psi}^+ \psi = \psi^* B_0 \psi. \end{aligned}$$

Nous obtenons deux vecteurs au moyen des grandeurs d'univers

$$s_\mu = \psi^\dagger \Gamma_\mu \psi \quad \text{et} \quad \sigma_\mu = \bar{\psi}^\dagger \Gamma_\mu \psi,$$

car, dans un changement de système de référence, on a

$$s'_\mu = \psi'^\dagger \Gamma_\mu \psi' = \psi^\dagger S^{-1} \Gamma_\mu S \psi = O_{\mu\nu} \psi^\dagger \Gamma_\nu \psi = O_{\mu\nu} s_\nu$$

et de même

$$\sigma'_\mu = O_{\mu\nu} \sigma_\nu.$$

A ces vecteurs d'univers correspondent les vecteurs d'espace-temps

$$\begin{aligned} \psi^* A_3 \psi & \quad \text{et} \quad -c \psi^* A_0 \psi \\ \psi^* B_1 \psi & \quad \text{et} \quad -c \psi^* B_\mu \psi. \end{aligned}$$

7. Opérateurs d'évolution et équations d'ondes complémentaires. — Avant de procéder à une étude plus approfondie des grandeurs correspondant aux combinaisons des matrices Γ_ν , nous allons examiner plus attentivement notre système d'équations d'ondes, ce qui nous conduira à lui adjoindre un deuxième système de grandeurs intervenant dans notre représentation corpusculaire.

Nous avons pris comme équations d'ondes corpusculaires le double système

$$\begin{aligned} S\psi_i &= \lambda \psi_i & \lambda &= \pm im_0c \\ S\psi_k &= 0. \end{aligned}$$

Les ondes en ψ_i correspondent à des états de masse propre essentiellement différents de zéro, tandis que le système en ψ_k correspond au cas où la masse propre est nulle.

Notre opérateur S est tel que

$$S^3 = S \square \quad \text{avec} \quad \square = \sum_\mu p_\mu^2.$$

Réciproquement, nous pouvons considérer un opérateur S' correspondant au corpuscule ayant les mêmes états de masse propre que le premier, mais tel que ses états $\pm im_0c$ coïncident avec les états de masse propre nulle du premier, tandis que ses

états de masse propre nulle coïncident avec les états $\pm im_{\mu}c$ du premier.

Les opérateurs S et S' seront alors liés par les relations

$$(38) \quad \begin{cases} (a) & S^2 + S'^2 = \square \\ (b) & SS' \equiv 0 \quad S^2 S'^2 \equiv 0. \end{cases}$$

Aux systèmes d'équations

$$(39) \quad S\psi_i = \lambda\psi_i \quad S\psi_k = 0$$

correspondront les systèmes

$$(40) \quad S'\psi'_i = 0 \quad S'\psi'_k = \lambda\psi'_k.$$

Connaissant l'opérateur S , nous allons utiliser les relations (38a) et (38b) pour déterminer S' .

En raison de $SS' = 0$, la multiplication de (38a) par S' donne

$$(41) \quad S'^3 = S' \square.$$

Par suite, si nous posons

$$(42) \quad S = \sum_{\mu} \Gamma_{\mu} p_{\mu} \quad \text{et} \quad S' = \sum_{\nu} J_{\nu} p_{\nu}$$

les J_{ν} satisfont au système des relations (9a) du chapitre I.

Si nous remplaçons maintenant S et S' par leurs expressions dans la relation

$$S^2 + S'^2 = \square$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \Gamma_{\mu}^2 p_{\mu}^2 + \sum_{\mu, \nu} (\Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu}) p_{\mu} p_{\nu} + \sum_{\nu} J_{\nu}^2 p_{\nu}^2 \\ + \sum_{\mu, \nu} (J_{\mu} J_{\nu} + J_{\nu} J_{\mu}) p_{\mu} p_{\nu} = \sum_{\mu} p_{\mu}^2 \end{aligned}$$

ce qui nous donne par identification

$$(43) \quad \Gamma_{\mu}^2 + J_{\mu}^2 = 1$$

$$(44) \quad \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} + J_{\mu} J_{\nu} + J_{\nu} J_{\mu} = 0.$$

La relation (41) nous laissait le choix entre les deux systèmes particuliers (I) et (II) pour les relations entre les J_{ν} . Mais la relation (44) nous montre que si $J_{\mu} J_{\nu} + J_{\nu} J_{\mu} = 0$,

c'est-à-dire que si les J_μ appartiennent au système (II), il doit en être de même pour les Γ_ν . Les Γ_ν appartenant au système (I), les J_μ devront appartenir à ce même système.

Nous aurons donc les deux systèmes de relations

$$(45\ a) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_\mu^3 = \Gamma_\mu \\ \Gamma_\mu \Gamma_\nu^2 + \Gamma_\nu^2 \Gamma_\mu = \Gamma_\mu \\ \Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\lambda + \Gamma_\lambda \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 0 \end{array} \right. \quad (45\ b) \left\{ \begin{array}{l} J_\mu^3 = J_\mu \\ J_\mu J_\nu^2 + J_\nu^2 J_\mu = J_\mu \\ J_\mu J_\nu J_\lambda + J_\lambda J_\nu J_\mu = 0. \end{array} \right.$$

Si nous considérons maintenant les relations

$$(38\ b) \quad SS' \equiv 0 \quad S'S \equiv 0,$$

on en tire, par identification,

$$(46) \quad \Gamma_\mu J_\mu = 0$$

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_\mu J_\nu + \Gamma_\nu J_\mu = 0 \\ J_\mu \Gamma_\nu + J_\nu \Gamma_\mu = 0. \end{array} \right.$$

Les relations (43), (44), (46), (47) permettent de passer du système (45a) au système (45b).

Nous allons utiliser ces relations pour en déduire un système de liaison plus étroit entre les Γ_μ et les J_μ .

La relation (44), multipliée à gauche par Γ_μ donne

$$\Gamma_\nu^2 \Gamma_\nu + \Gamma_\mu J_\nu J_\mu = 0,$$

d'où

$$\Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu = \Gamma_\nu J_\mu^2$$

et de même

$$\Gamma_\nu \Gamma_\nu^2 = J_\nu^2 \Gamma_\nu$$

et par addition

$$\Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu^2 = \Gamma_\nu = \Gamma_\nu J_\mu^2 + J_\mu^2 \Gamma_\nu$$

d'où les deux relations

$$(48) \quad \begin{array}{l} \Gamma_\nu J_\mu^2 + J_\mu^2 \Gamma_\nu = \Gamma_\nu \\ J_\nu \Gamma_\mu^2 + \Gamma_\mu^2 J_\nu = J_\nu \end{array}$$

qui multipliées à droite et à gauche par J_μ ou Γ_μ donnent

$$J_\mu \Gamma_\nu J_\mu = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_\mu J_\nu \Gamma_\mu = 0,$$

analogues des relations

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 0 \quad \text{et} \quad J_\mu J_\nu J_\mu = 0.$$

Les relations (47) multipliées par Γ_λ et J_λ fournissent également les relations

$$(49) \quad \Gamma_\mu J_\nu \Gamma_\lambda + \Gamma_\nu J_\mu \Gamma_\lambda = \Gamma_\mu J_\nu \Gamma_\lambda + \Gamma_\lambda J_\nu \Gamma_\mu = 0$$

$$(50) \quad J_\mu \Gamma_\nu J_\lambda + J_\nu \Gamma_\mu J_\lambda = J_\mu \Gamma_\nu J_\lambda + J_\lambda \Gamma_\nu J_\mu = 0.$$

Nous allons maintenant montrer que l'on a également

$$(51) \quad \Gamma_\mu \Gamma_\nu J_\lambda + J_\lambda \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 0.$$

Cette démonstration étant assez longue, nous n'en donnons que la structure.

Posant

$$a = \Gamma_\mu \Gamma_\nu J_\lambda, \quad b = J_\lambda \Gamma_\nu \Gamma_\mu$$

on voit facilement que

$$a^3 = -a, \quad b^3 = -b.$$

D'autre part, un calcul facile montre que

$$a^2 = b^2 = -ab.$$

Or $a^2 = -ab$ donne par multiplication

$$a^3 = -a \quad -a^2b,$$

d'où

$$a = a^2b \quad b^3 = -b$$

et par suite

$$a + b = 0.$$

Des relations (48), (49), (50), (51) nous déduisons que si K_μ désigne, soit Γ_μ , soit J_μ , les K_μ sont liés par les relations

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_\mu^3 = K_\mu \\ K_\mu K_\nu^2 + K_\nu^2 K_\mu = K_\mu \\ K_\mu K_\nu K_\lambda + K_\lambda K_\nu K_\mu = 0. \end{array} \right.$$

REMARQUE. — Si nous considérons les opérateurs S et S' comme des vecteurs réels, la détermination de ces opérateurs peut être ramenée à la recherche d'un opérateur-vecteur complexe $\Lambda = S + iS'$ dont seul le module est connu par l'intermédiaire de la relation

$$\Lambda^* \Lambda = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2$$

cette relation pouvant être considérée comme équivalente aux deux relations

$$S^2 + S'^2 = \sum_j p_j^2 \quad S S' = 0.$$

A ce point de vue, notre théorie se présenterait comme l'extension au plan complexe de la linéarisation effectuée sur l'axe réel en théorie de Dirac.

8. Variance des grandeurs complémentaires. — Les formules de liaison entre les $\mathbf{J}$ et les Γ nous permettent d'étudier les variances des grandeurs de la forme

$$\psi^+ \mathfrak{R}(\mathbf{J}) \psi \quad \text{et} \quad \bar{\psi}^+ \mathfrak{R}(\mathbf{J}) \bar{\psi},$$

les ψ étant solutions du système en Γ .

Ces variances se déduiront facilement de la connaissance de la transformation subie par les $\mathbf{J}$ dans une transformation de Lorentz.

Si nous considérons $S^{-1} \mathbf{J}_\lambda S$, S étant la substitution linéaire subie par les ψ et que nous avons mise sous la forme

$$S = I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} S^{-1} \mathbf{J}_\lambda S &= \left(I - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \right) \mathbf{J}_\lambda \left(I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \right) \\ &= \mathbf{J}_\lambda - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} [(\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \mathbf{J}_\lambda - \mathbf{J}_\lambda (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu)], \end{aligned}$$

ce qui nous donne

1° Si $\lambda = \mu$ ou ν

$$\begin{aligned} S^{-1} \mathbf{J}_\lambda S &= \mathbf{J}_\lambda - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (\Gamma_\mu \Gamma_\nu \mathbf{J}_\lambda + \mathbf{J}_\lambda \Gamma_\mu \Gamma_\nu) \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (\Gamma_\nu^2 \mathbf{J}_\lambda + \mathbf{J}_\lambda \Gamma_\nu^2) = \mathbf{J}_\lambda + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \mathbf{J}_\lambda. \end{aligned}$$

2° Si $\lambda \neq \mu, \nu$

$$S^{-1} \mathbf{J}_\lambda S = \mathbf{J}_\lambda$$

$\mathbf{J}_\lambda$ se transforme donc comme un vecteur.

Les combinaisons $\mathfrak{R}(\mathbf{J}_\mu)$ auront donc la même variance que les combinaisons correspondantes $\mathfrak{R}(\Gamma_\mu)$.

9. Construction des matrices de séparation $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{B}_0$. — Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les grandeurs $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{B}_0$ que nous avons utilisées précédemment pour la séparation du temps dans notre équation d'ondes d'univers.

Les matrices Γ_μ^2 et $\mathbf{J}_\mu^2$ sont liées par la relation

$$\Gamma_\mu^2 + \mathbf{J}_\mu^2 = 1.$$

Nous pouvons donc définir une matrice $\mathbf{C}_\mu$ telle que

$$(53) \quad \begin{cases} \Gamma_\mu^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathbf{C}_\mu \\ \mathbf{J}_\mu^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{C}_\mu \end{cases}$$

c'est-à-dire telle que

$$(54) \quad \mathbf{C}_\mu = \Gamma_\mu^2 - \mathbf{J}_\mu^2 = 2\Gamma_\mu^2 - 1 = 1 - 2\mathbf{J}_\mu^2.$$

Si nous prenons Γ_μ sous forme diagonale, il en sera de même pour $\mathbf{J}_\mu$ et par suite pour $\mathbf{C}_\mu$.

Γ_μ^2 présentant la valeur $+1$ quand $\mathbf{J}_\mu^2$ est nul, et réciproquement,

$$\mathbf{C}_\mu = \Gamma_\mu^2 - \mathbf{J}_\mu^2$$

nous montre que l'élément de $\mathbf{C}_\mu$ aura la valeur $+1$ quand l'élément de Γ_μ sera différent de 0 et la valeur -1 quand l'élément de Γ_μ sera nul.

De (53) nous déduisons

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= \mathbf{C}_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \mathbf{C}_\mu \\ \mathbf{J}_\mu &= \mathbf{C}_\mu \mathbf{J}_\nu + \mathbf{J}_\nu \mathbf{C}_\mu \\ \mathbf{C}_\mu^2 &= 1. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \Gamma_\nu \Gamma_\mu^2 &= \frac{1}{2} \Gamma_\nu + \frac{1}{2} \Gamma_\nu \mathbf{C}_\mu \\ \Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu &= \frac{1}{2} \Gamma_\nu + \frac{1}{2} \mathbf{C}_\mu \Gamma_\nu \end{aligned}$$

d'où

$$\Gamma_\nu C_\mu + C_\mu \Gamma_\nu = 0$$

et de même

$$J_\nu C_\mu + C_\mu J_\nu = 0.$$

C_μ est donc une matrice satisfaisant au système des relations

$$(55) \quad \begin{cases} C_\mu^2 = 1 & C_\mu = \Gamma_\mu^2 - J_\mu^2 \\ C_\mu \Gamma_\nu = \Gamma_\nu & C_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu C_\mu = 0 \\ C_\mu J_\nu = -J_\nu & C_\mu J_\nu + J_\nu C_\mu = 0. \end{cases}$$

Or de $\Gamma_\nu \Gamma_\mu^2 + \Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu = \Gamma_\nu$, nous déduisons

$$\begin{aligned} \Gamma_\nu \Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu + \Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu^2 &= \Gamma_\nu^2 \\ \Gamma_\nu^2 \Gamma_\mu^2 + \Gamma_\nu \Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu &= \Gamma_\nu^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\Gamma_\nu^2 \Gamma_\mu^2 = \Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu^2.$$

Si nous remplaçons dans cette égalité

$$\Gamma_\mu^2 \text{ par } \frac{1}{2}(1 + C_\mu), \quad \Gamma_\nu^2 \text{ par } \frac{1}{2}(1 + C_\nu),$$

nous voyons que

$$(56) \quad C_\mu C_\nu = C_\nu C_\mu.$$

Les C_μ commutent donc tous entre eux.

Les relations précédentes nous montrent que

$$C_1 C_2 C_3 \Gamma_\mu = \Gamma_\mu C_1 C_2 C_3 \quad \text{si } \mu = 1, 2, 3,$$

tandis que

$$C_1 C_2 C_3 \Gamma_4 + \Gamma_4 C_1 C_2 C_3 = 0.$$

Nous obtiendrons donc des matrices satisfaisant aux propriétés que nous avons indiquées en posant

$$(57) \quad \begin{cases} A_0 = C_4 \\ B_0 = C_1 C_2 C_3. \end{cases}$$

Si l'on cherche comment se transforme C_λ dans une transformation de Lorentz, on obtient

$$S^{-1} C_\mu S = C_\mu + \varepsilon_{\mu\nu} (\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu).$$

C_μ se transforme donc comme la composante $\mu\mu$ d'un tenseur symétrique du second ordre.

Nous allons maintenant montrer directement que

$$\psi^+ C_1 C_2 C_3 C_4 \psi$$

est un invariant.

Utilisant l'expression de S donnée en (29) nous avons

$$S^{-1} A_0 B_0 S = A_0 B_0 + \frac{1}{2} \sum_{(\mu\nu)} \varepsilon_{(\mu\nu)} [A_0 B_0 T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} A_0 B_0].$$

Nous devons calculer

$$A_0 B_0 T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} A_0 B_0.$$

Or $A_0 B_0$ peut s'écrire $C_\rho C_\sigma C_\mu C_\nu$ ($\rho, \sigma \neq \mu, \nu$); d'où

$$\begin{aligned} & C_\rho C_\sigma (C_\mu C_\nu T_{\rho\nu} - T_{\rho\nu} C_\mu C_\nu) \\ &= C_\rho C_\sigma \{ C_\mu C_\nu (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu) - (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu) C_\mu C_\nu \} = 0; \end{aligned}$$

d'où

$$S^{-1} C_1 C_2 C_3 C_4 S = C_1 C_2 C_3 C_4$$

$\psi^+ A_0 B_0 \psi$ est donc bien un invariant.

10. Tenseurs du second ordre associés au corpuscule. —

Les C_μ forment les composantes $\mu\mu$ d'un tenseur symétrique du second ordre dont nous pouvons écrire le terme général sous la forme

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \psi^+ (\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \psi &= \psi^+ (S^{-1} \Gamma_\mu S S^{-1} \Gamma_\nu S + S^{-1} \Gamma_\nu S S^{-1} \Gamma_\mu S) \psi \\ &= O_{\rho\sigma} O_{\gamma\tau} \psi^+ (\Gamma_\rho \Gamma_\sigma + \Gamma_\sigma \Gamma_\rho) \psi. \end{aligned}$$

Les composantes de ce tenseur s'écrivent

$$\begin{array}{cccc} C_1 & \Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_1 & \Gamma_1 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_1 & \Gamma_1 \Gamma_4 + \Gamma_4 \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \Gamma_1 + \Gamma_1 \Gamma_2 & C_2 & \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_2 & \Gamma_2 \Gamma_4 + \Gamma_4 \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \Gamma_1 + \Gamma_1 \Gamma_3 & \Gamma_3 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 & C_3 & \Gamma_3 \Gamma_4 + \Gamma_4 \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \Gamma_1 + \Gamma_1 \Gamma_4 & \Gamma_4 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_4 & \Gamma_4 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_4 & C_4 \end{array}$$

En raison des propriétés de variance des J que nous avons montrées antérieurement, nous obtenons également un tenseur symétrique du deuxième ordre avec

$$\psi^+ (J_\mu J_\nu + J_\nu J_\mu) \psi.$$

Nous allons montrer que ces deux tenseurs sont tels que

$$\psi^+(\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \psi = - \psi^+(\Gamma_\mu J_\nu + J_\nu \Gamma_\mu) \psi.$$

Cette égalité résulte immédiatement de la formule (44). Mais nous pouvons également en donner une démonstration directe en n'utilisant que les relations de définition de $\mathbf{J}$ par rapport aux Γ .

En effet, si pour posons

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} &= \Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu, & b_{\mu\nu} &= J_\mu J_\nu + J_\nu J_\mu \\ (a_{\mu\nu})^3 &= a_{\mu\nu} & (b_{\mu\nu})^3 &= b_{\mu\nu} \end{aligned}$$

on voit facilement que

$$(a_{\mu\nu})^2 = (b_{\mu\nu})^2 = - (a_{\mu\nu}) (b_{\mu\nu});$$

d'où

$$(a_{\mu\nu})^3 - a_{\mu\nu} = - (a_{\mu\nu})^2 b_{\mu\nu} = - (b_{\mu\nu})^3 = - b_{\mu\nu}.$$

Nous n'aurons donc dans notre théorie que deux tenseurs symétriques du deuxième ordre :

$$\begin{aligned} -i \psi^+(\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \psi &= \psi^* \Lambda_0 (\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \psi \\ \bar{\psi}^+(\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \psi &= \psi^* B_0 (\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \psi. \end{aligned}$$

Nous pouvons également construire un tenseur antisymétrique du deuxième ordre sous la forme

$$\psi^+ i (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \psi$$

et l'on voit facilement que

$$[i (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu)]^3 = i (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu).$$

Les valeurs propres de la matrice $i (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu)$ seront donc 0, + 1, - 1.

Si nous calculons le carré

$$(i (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu))^2 = \Gamma_\mu^2 + \Gamma_\nu^2 - 2 \Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu^2$$

nous constatons que cette valeur est la même que celle de $(\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu)^2$.

Par suite si $(\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu)$ est sous forme diagonale, il en sera de même pour

$$(\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu)^2 \quad \text{et pour} \quad (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu)^2$$

et les valeurs propres 0 se correspondront dans ces deux grandeurs

Si nous considérons maintenant la grandeur associée $i(\mathbf{J}_\mu \mathbf{J}_\nu - \mathbf{J}_\nu \mathbf{J}_\mu)$ nous aurons de même

$$|i(\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu)|^2 = i(\mathbf{J}_\mu \mathbf{J}_\nu - \mathbf{J}_\nu \mathbf{J}_\mu).$$

Si nous posons

$$a_{\mu\nu} = i(\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu); \quad b_{\mu\nu} = i(\mathbf{J}_\mu \mathbf{J}_\nu - \mathbf{J}_\nu \mathbf{J}_\mu)$$

nous avons

$$(a_{\mu\nu})^3 = a_{\mu\nu} \quad (b_{\mu\nu})^3 = b_{\mu\nu} \\ (a_{\mu\nu})^2 = (b_{\mu\nu})^2 = a_{\mu\nu} b_{\mu\nu}$$

d'où

$$(a_{\mu\nu})^3 = (a_{\mu\nu})^2 b_{\mu\nu} = (b_{\mu\nu})^3 \\ a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}.$$

Les deux grandeurs

$$\psi^+ i(\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \psi \quad \text{et} \quad \psi^+ i(\mathbf{J}_\mu \mathbf{J}_\nu - \mathbf{J}_\nu \mathbf{J}_\mu) \psi$$

sont donc égales.

Nous n'aurons donc que deux tenseurs antisymétriques du deuxième ordre dont les composantes d'espace se mettront sous la forme

$$\psi^+ (\Gamma_p \Gamma_q - \Gamma_q \Gamma_p) \psi = \psi^* i A_0 (A_p A_q - A_q A_p) \psi \\ \overline{\psi}^+ i (\Gamma_p \Gamma_q - \Gamma_q \Gamma_p) \psi = -\psi^* i C_r (B_p B_q - B_q B_p) \psi \\ r \neq p \text{ et } q.$$

11. Relation classique correspondant à l'équation d'ondes.

— Nous allons maintenant examiner, à un autre point de vue, les deux systèmes

$$\frac{1}{c} \Lambda_1 \frac{\partial \psi_{(i)}}{\partial t} = \left(\Lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} + \Lambda_3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\pi i}{h} A_0 m_0 c \right) \psi_{(i)} \\ \frac{1}{c} \Lambda_1 \frac{\partial \psi_{(h)}}{\partial t} = \left(\Lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} + \Lambda_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi_{(h)}$$

correspondant, le premier, aux ondes de masse propre non nulle, le deuxième à celles de masse propre nulle.

Nous avons montré que ces deux systèmes gardent leurs formes dans une transformation de Lorentz en conservant

également la forme de l'équation de continuité qui lie les grandeurs

$$-c \psi^* A_\mu \psi \quad \text{et} \quad \psi^* A_4 \psi$$

que nous avons assimilées aux composantes du quadrivecteur d'espace-temps densité-courant de la probabilité de présence.

En raison de cette interprétation, nous pouvons considérer l'opérateur de notre équation d'ondes comme correspondant, non pas, comme en théorie de Dirac, à la relation entre grandeurs classiques

$$(58) \quad W = \dot{x}_1 p_1 + \dot{x}_2 p_2 + \dot{x}_3 p_3 + m c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$$

mais comme correspondant à la relation

$$(59) \quad (\rho W) = (\rho v_1) p_1 + (\rho v_2) p_2 + (\rho v_3) p_3 + \rho m c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$$

pour les ondes en $\psi_{(i)}$ et à

$$(\rho W) = (\rho v_1) p_1 + (\rho v_2) p_2 + (\rho v_3) p_3$$

pour les ondes en $\psi_{(k)}$ sans que l'on puisse dans ces expressions supprimer ρ .

Si nous écrivons alors nos équations d'ondes sous la forme

$$(61) \quad \frac{1}{c} A_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi,$$

l'opérateur H ne doit pas être considéré comme l'opérateur correspondant à la grandeur énergie, mais comme l'opérateur correspondant à la grandeur (ρW) .

Si nous examinons la variance de cet opérateur H , nous voyons que la grandeur correspondante

$$\psi^* H \psi = \psi^* A_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

correspond à la grandeur d'univers

$$\psi^* \Gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_4}$$

qui dans une transformation de Lorentz donne

$$\psi'^* \Gamma_4 \frac{\partial \psi'}{\partial x'_4} = \psi^* S^{-1} \Gamma_4 S O_{1\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi = O_{4\lambda} O_{1\nu} \psi^* \Gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi$$

$\psi^* H \psi$ se transforme donc comme la composante 44 d'un tenseur du deuxième ordre.

12. Séparation de l'opérateur d'énergie. — Cette impossibilité dans le cas actuel de séparer l'opérateur W de l'opérateur (ρW) nous conduit à examiner à quelles conditions cette séparation est possible, c'est-à-dire à quelles conditions l'équation d'ondes peut s'écrire sous la forme

$$(62) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi = \sum_p A_p \frac{\partial \psi}{\partial x_p} + m_0 c \psi.$$

Une équation de cette forme conduit à l'équation de conservation

$$(63) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\psi^* \psi] = \sum_p \frac{\partial}{\partial x_p} [\psi^* A_p \psi].$$

Si l'on veut interpréter cette équation comme correspondant à l'équation de conservation de la densité et du courant de la probabilité de présence du corpuscule, les grandeurs $\psi^* \psi$ et $\psi^* A_p \psi$ doivent se transformer comme les composantes d'un quadrivecteur.

Si nous considérons une transformation de Lorentz de la forme

$$(64) \quad \begin{cases} ct = ct' + \gamma x'_4 \\ x_4 = ct' sh \gamma + x'_4 ch \gamma \end{cases} \quad (x'_p \text{ variable d'espace déterminée}),$$

à laquelle correspondent les transformations infinitésimales

$$\begin{aligned} ct &= ct' + \gamma x'_4 & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} - \gamma \frac{\partial}{\partial x'_4} \\ x_4 &= \gamma ct' + x'_4 & \frac{\partial}{\partial x_4} &= \frac{\partial}{\partial x'_4} - \gamma \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned}$$

nous obtenons, en remplaçant dans les équations

$$(62) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_p A_p \frac{\partial \psi}{\partial x_p} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c A_4 \psi$$

$$(65) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \sum_p \frac{\partial \psi^*}{\partial x_p} A_p - \frac{2\pi i}{h} m_0 c \psi^* A_4$$

le système transformé (en isolant x_μ)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{c \partial t'} - \gamma \frac{\partial \psi}{\partial x'_\mu} &= A_\mu \left(\frac{\partial \psi}{\partial x'_\mu} - \gamma \frac{\partial \psi}{c \partial t'} \right) + \sum_i A_i \frac{\partial \psi}{\partial x'_i} + x m_0 c A_4 \psi \\ 1 \frac{\partial \psi^*}{c \partial t'} - \gamma \frac{\partial \psi^*}{\partial x'_\mu} &= \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x'_\mu} - \gamma \frac{\partial \psi^*}{c \partial t'} \right) A_\mu + \sum_i \frac{\partial \psi^*}{\partial x'_i} A_i - x m_0 c \psi^* A_4 \end{aligned}$$

(i variables d'espace autres que μ)

ou

$$(66) \quad \begin{cases} (1 + \gamma A_\mu) \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t'} = (\gamma + A_\mu) \frac{\partial \psi}{\partial x'_\mu} + \sum_i A_i \frac{\partial \psi}{\partial x'_i} + x m_0 c A_4 \psi \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t'} (1 + \gamma A_\mu) = \frac{\partial \psi^*}{\partial x'_\mu} (\gamma + A_\mu) + \sum_i \frac{\partial \psi^*}{\partial x'_i} A_i - x m_0 c \psi^* A_4 \end{cases}$$

équations qui conduisent à la relation de conservation

$$(67) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} [\psi^* (1 + \gamma A_\mu) \psi] - \frac{\partial}{\partial x'_\mu} [\psi^* (\gamma + A_\mu) \psi] + \sum_i \frac{\partial}{\partial x'_i} (\psi^* A_i \psi) = 0$$

Pour conserver à la fois la forme des équations (62), (65) et (63) aux équations (66) et (67) moyennant une substitution sur les ψ , il faut que l'on puisse trouver une transformation S telle que, en posant

$$\psi = S \psi', \quad \psi^* = \psi'^* S^*$$

on ait

$$(68) \quad \begin{cases} S^* (1 + \gamma A_\mu) S = 1 & S^* A_i S = A_i \\ S^* (\gamma + A_\mu) S = A_\mu & S^* A_4 S = A_4 \end{cases}$$

Ces relations donnent, en prenant la transformation infinitésimale $S = I + \gamma T$,

$$(69) \quad \begin{cases} T + T^* + A_\mu = 0 \\ T^* A_\mu + A_\mu T + 1 = 0 \\ T^* A_i + A_i T = 0 \\ T^* A_4 + A_4 T = 0 \end{cases}$$

Si T est réel, la première équation donne la solution

$$T = -\frac{A_\mu}{2}$$

et les autres deviennent des relations de conditions entre les A , qui s'écrivent

$$(70) \quad \begin{cases} A_\mu^2 = 1 \\ A_\mu A_i + A_i A_\mu = 0 \\ A_\mu A_4 + A_4 A_\mu = 0. \end{cases}$$

Ce sont précisément les règles auxquelles satisfont les α de Dirac.

On voit, d'autre part, que A_μ étant réel (hermitique), T ne peut être imaginaire pure (antihermitique).

Nous allons montrer que T ne peut pas être complexe si

$$A_\mu^2 \neq 1.$$

En effet, soit

$$T = -\frac{A_\mu}{2} - i\beta.$$

La deuxième équation donne

$$i(\beta A_\mu - A_\mu \beta) + 1 - A_\mu^2 = 0$$

ou

$$\beta A_\mu - A_\mu \beta = i(A_\mu^2 - 1).$$

Si l'on considère une représentation des A dans laquelle A_μ est diagonale, A_μ^2 est également diagonale. Si A_μ présente des valeurs propres ± 1 , à ces valeurs correspondront pour A_μ^2 des valeurs $+1$. Si ces valeurs ont lieu pour l'indice ii , l'équation ci-dessus donne

$$(\beta_\mu)_{ii} - (\beta_\mu)_{ii} = 0.$$

Il pourra y avoir une solution.

Mais si A_μ présente des valeurs propres 0, alors on aura

$$(\beta_\mu)_{ii}(1) - (1)(\beta_\mu)_{ii} = 0 = -i(1);$$

d'où une impossibilité.

La condition $A_\mu^2 = 1$ est donc nécessaire.

Par conséquent, si les A_μ ne sont pas unitaires, on ne pourra pas dans une transformation de Lorentz conserver simultanément les formes des équations d'ondes directes et

transposées et de l'équation de continuité, l'équation d'ondes étant écrite sous la forme

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi.$$

13. Intégrales premières. — Notre équation d'ondes, étant écrite sous la forme

$$\frac{1}{c} A_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi,$$

introduit un opérateur H correspondant, non pas à l'opérateur énergie, mais à l'opérateur produit des opérateurs correspondant aux grandeurs densité et énergie (ρW).

Par suite, si nous voulons définir une variation au cours du temps au moyen de notre opérateur H , la relation de dérivation quantique

$$(71) \quad \dot{C} = (C, H) = (CH - HC)$$

donnera, non pas une variation par rapport à une grandeur t conjuguée de W , mais par rapport à une grandeur conjuguée de celle correspondant à l'opérateur (ρW).

$CH - HC$ s'écrivant

$$\frac{1}{c} \left[CA_4 \frac{\partial}{\partial t} - A_4 C \frac{\partial}{\partial t} - A_4 \frac{\partial C}{\partial t} \right],$$

nous aurons, si

$$A_4 C = C A_4,$$

ce qui s'interprète en disant que les grandeurs correspondant à C et à A_4 sont observables simultanément,

$$(72) \quad - \frac{\partial}{\partial t} [A_4 C] = [CH - HC].$$

Nous voyons ainsi que la grandeur $A_4 C$ se conserve au cours du temps si

$$(73) \quad CH - HC = 0$$

et

$$CA_4 = A_4 C.$$

Nous dirons alors que C est intégrale première.

Nous voyons ici qu'il est nécessaire d'ajouter une condition supplémentaire à la définition

$$CH - HC = 0$$

adoptée en théorie de Dirac.

Les deux conditions (73) sont satisfaites, comme on le voit sans peine, pour les opérateurs

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

correspondant aux grandeurs énergie et impulsion qui, ici comme en mécanique classique, sont intégrales premières. Mais H n'est pas intégrale première.

14. Spin. — La définition de l'intégrale première nous met en mesure de définir le spin de notre corpuscule.

Nous définissons le spin comme étant la grandeur correspondant à l'opérateur qui, ajouté à l'opérateur moment de rotation, donne une intégrale première.

Soient N_x, N_y, N_z , les grandeurs correspondant aux opérateurs de spin S_x, S_y, S_z .

Nous devons avoir

$$\left[-\frac{h}{2\pi i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) + S_z \right] H - H \left[-\frac{h}{2\pi i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) + S_z \right] = 0$$

et

$$x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

commutant avec A_4

$$A_1 S_2 - S_2 A_1 = 0.$$

Posant

$$H = A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\pi i}{h} A_0 m_0 c$$

on aura

$$\left(-\frac{h}{2\pi i}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)H-H\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{h}{2\pi i}\right) \\ -\frac{h}{2\pi i}\left(\Lambda_2\frac{\partial}{\partial x}-\Lambda_1\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

S_z devra donc être tel que

$$S_z H - H S_z = \frac{h}{2\pi i} \left(\Lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

ce qui s'écrit

$$(S_z \Lambda_1 - \Lambda_1 S_z) \frac{\partial}{\partial x} + (S_z \Lambda_2 - \Lambda_2 S_z) \frac{\partial}{\partial y} + (S_z \Lambda_3 - \Lambda_3 S_z) \frac{\partial}{\partial z} \\ + \frac{2\pi i}{h} (S_z \Lambda_0 - \Lambda_0 S_z) = \frac{h}{2\pi i} \left(\Lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} - \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial y} \right);$$

d'où le système de relations

$$S_z \Lambda_1 - \Lambda_1 S_z = \frac{h}{2\pi i} \Lambda_2$$

$$S_z \Lambda_2 - \Lambda_2 S_z = -\frac{h}{2\pi i} \Lambda_1$$

$$S_z \Lambda_3 - \Lambda_3 S_z = 0$$

$$S_z \Lambda_0 - \Lambda_0 S_z = 0,$$

auquel nous devons ajouter la relation de condition

$$S_z \Lambda_4 - \Lambda_4 S_z = 0.$$

Ces équations sont valables pour le spin de tout corpuscule dont l'équation d'ondes se met sous la forme

$$\frac{1}{c} \Lambda_4 \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi,$$

sans faire intervenir aucune hypothèse sur les relations existant entre les Λ . Ces relations n'interviennent que dans la détermination de la forme de la solution S_z .

Les Λ étant ceux que nous avons utilisés jusqu'ici pour notre corpuscule, nous trouvons immédiatement la solution.

$$S_z = \frac{h}{2\pi i} (\Lambda_1 \Lambda_2 - \Lambda_2 \Lambda_1) = \frac{h}{2\pi i} i (\Lambda_1 \Lambda_2 - \Lambda_2 \Lambda_1).$$

Si nous cherchons les valeurs propres de cet opérateur, la matrice $i(\Lambda_1 \Lambda_2 - \Lambda_2 \Lambda_1)$ étant telle que

$$[i(\Lambda_1 \Lambda_2 - \Lambda_2 \Lambda_1)]^3 = i(\Lambda_1 \Lambda_2 - \Lambda_2 \Lambda_1),$$

c'est-à-dire de valeurs propres 0, + 1, - 1, les états purs de spin correspondront aux valeurs

$$\frac{h}{2\pi}, \quad -\frac{h}{2\pi}, \quad 0.$$

Par permutations circulaires, nous avons les composantes de $\vec{S}$:

$$S_x = \frac{h}{2\pi} [i (A_2 A_3 - A_3 A_2)]$$

$$S_y = \frac{h}{2\pi} [i (A_3 A_1 - A_1 A_3)]$$

$$S_z = \frac{h}{2\pi} [i (A_1 A_2 - A_2 A_1)].$$

Si nous examinons comment se transforment les grandeurs

$$M_{\mu\nu} = \psi^* (x_\nu p_\mu - x_\mu p_\nu) \psi$$

$$N_{\mu\nu} = \frac{h}{2\pi} \psi^* [i (A_\nu A_\mu - A_\mu A_\nu)] \psi,$$

nous avons

$$\mu, \nu = 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned} \psi'^* (x'_\nu p'_\mu - x'_\mu p'_\nu) \psi' &= i \psi'^+ A_0 (x'_\nu p'_\mu - x'_\mu p'_\nu) \psi \\ &= -i \psi'^+ S^{-1} A_0 S O_{\mu\rho} O_{\nu\sigma} (x_\sigma p_\rho - x_\rho p_\sigma) \psi. \end{aligned}$$

Or, pour une transformation d'espace,

$$S^{-1} A_0 S = A_0.$$

Par suite

$$\psi'^* (x'_\nu p'_\mu - x'_\mu p'_\nu) \psi' = O_{\mu\rho} O_{\nu\sigma} \psi^* (x_\sigma p_\rho - x_\rho p_\sigma) \psi$$

se transforme comme la composante d'espace $\mu\nu$ d'un tenseur antisymétrique du second ordre, c'est-à-dire comme un vecteur d'espace.

De même

$$\begin{aligned} \psi'^* i (A_\nu A_\mu - A_\mu A_\nu) \psi' &= \psi'^+ A_0 (\Gamma_\nu \Gamma_\mu - \Gamma_\mu \Gamma_\nu) \\ &= \psi'^+ S^{-1} A_0 S O_{\mu\rho} O_{\nu\sigma} (\Gamma_\sigma \Gamma_\rho - \Gamma_\rho \Gamma_\sigma) \psi; \end{aligned}$$

d'où

$$(\mu, \nu, \sigma, \rho = 1, 2, 3, \quad S^{-1} A_0 S = A_0)$$

$$\psi'^* i (A_\nu A_\mu - A_\mu A_\nu) \psi' = O_{\mu\rho} O_{\nu\sigma} \psi^* i (A_\rho A_\sigma - A_\sigma A_\rho) \psi;$$

par suite, les deux densités de moyennes considérées se transforment de la même façon et comme un vecteur dans une transformation d'espace.

CHAPITRE III

ETUDE DU CORPUSCULE DU SECOND TYPE

Nous allons maintenant étudier le corpuscule dont l'opérateur S de l'équation d'ondes d'univers satisfaisant à la relation

$$(1) \quad S^2 = \square S$$

est représenté par la somme $\sum_{\mu} \Gamma_{\mu} p_{\mu}$, les Γ_{μ} formant un système de matrices hermitiques liées par les relations

$$(2) \quad (\Gamma_{\mu})^2 = \Gamma_{\mu} \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

$$(3) \quad \Gamma_{\mu} = \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu}^2 = \Gamma_{\nu}^2 \Gamma_{\mu} \quad \mu \neq \nu$$

$$(4) \quad \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} = 0.$$

Ces Γ sont des nombres différents des nombres anticommutants utilisés en théorie de Dirac, les relations (2) et (3) n'ayant pas d'équivalent chez ceux-ci.

Nous aurons alors le double système d'équations d'ondes

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\Gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + \kappa \lambda \right] \psi_{(i)} = 0 \\ \kappa = \frac{2\pi i}{h} \lambda = \pm i m_0 c \end{array} \right.$$

pour les ondes de masse propre non nulle et

$$(6) \quad \left[\Gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi_{(i)} = 0$$

pour les ondes de masse propre nulle,

1. Forme du système des matrices. — Nous allons montrer que si λ est $\neq 0$ et que si une des matrices Γ_{μ} est sous forme diagonale, les fonctions ψ d'indices correspondant à ceux des 0 de la diagonale de Γ_{μ} seront nulles.

En effet, d'après la relation (2), une des matrices Γ_{μ} , mise

sous forme diagonale, ne présentent dans celle-ci que des valeurs 0, + 1, - 1 et Γ_μ^2 seulement les valeurs 0 ou + 1.

Soient $(\Gamma_\mu^2)_{ll}$ les éléments de Γ_μ^2 correspondant aux valeurs 0, $(\Gamma_\mu^2)_{ll} = 0$.

La relation $\Gamma_\nu = \Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu$ donne

$$(\Gamma_\nu)_{lm} = (\Gamma_\mu^2)_{lk} (\Gamma_\nu)_{km}$$

Or $(\Gamma_\mu^2)_{kl} = 0$, quel que soit k ;

d'où

$$(\Gamma_\nu)_{lm} = 0.$$

De même

$$\Gamma_\nu = \Gamma_\nu \Gamma_\mu^2$$

donne

$$(\Gamma_\nu)_{ml} = (\Gamma_\nu)_{mk} (\Gamma_\mu^2)_{kl} = 0;$$

d'où

$$(\Gamma_\nu)_{ml} = 0.$$

Devant avoir simultanément $(\Gamma_\nu)_{lm} = 0$ et $(\Gamma_\nu)_{ml} = 0$, quel que soit m pour l donné, il en résulte que les $l^{\text{ièmes}}$ lignes et les $l^{\text{ièmes}}$ colonnes de tous les Γ_ν sont nulles si $(\Gamma_\mu)_{ll} = 0$.

Par suite, les coefficients des ondes en ψ_l sont donc tous nuls dans l'équation d'ondes; le terme $\lambda \psi_l = 0$ donne alors $\psi_l = 0$.

Nous supposerons donc dans ce qui va suivre qu'aucun des Γ_μ n'est sous forme diagonale.

Nous montrerons ultérieurement qu'il est possible de construire effectivement des systèmes de quatre matrices Γ_μ satisfaisant aux relations (2), (3), (4) et dont aucune n'est sous forme diagonale.

Nous pouvons essayer de construire avec les Γ_μ des relations (2), (3), (4) une matrice A_0 , comme nous l'avons fait antérieurement, en posant

$$\Gamma_\mu^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} A_0.$$

Si nous multiplions cette relation par Γ_μ , nous voyons que

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} \Gamma_\mu + \frac{1}{2} \Gamma_\mu A_0;$$

d'où

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu A_0 = A_0 \Gamma_\mu.$$

Mais, d'autre part, la relation $\Gamma_\nu = \Gamma_\nu \Gamma_\mu^2$ donne

$$\Gamma_\nu = \Gamma_\nu \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} A_0 \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} A_0 \right) \Gamma_\nu;$$

d'où

$$\Gamma_\nu = \Gamma_\nu A_0 = A_0 \Gamma_\nu.$$

Par suite le système des quatre Γ_μ se conserve dans la multiplication par A_0 , qui joue ici le rôle d'unité.

Nous ne pourrions donc pas utiliser A_0 pour séparer la variable de temps dans l'équation (5).

2. Séparation du temps. — Si nous isolons le terme en $\frac{\partial}{\partial t}$, l'équation (5) s'écrit

$$(6) \quad \Gamma_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \left\{ i \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + i \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + i \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + x i \lambda \right\} \psi.$$

Pour rétablir l'hermiticité des deux membres de cette équation, nous avons deux procédés que nous allons utiliser successivement.

Nous rendons notre opérateur hermitique en multipliant à gauche l'équation (6) par une matrice Γ_0 telle que

$$\Gamma_0^\dagger = 1, \quad \Gamma_0 \Gamma_4 = \Gamma_4 \Gamma_0, \quad \Gamma_\mu \Gamma_0 + \Gamma_0 \Gamma_\mu = 0 \\ \mu = 1, 2, 3.$$

Il existe effectivement une telle matrice, et nous montrerons plus loin comment nous pouvons la construire.

Si nous posons alors

$$\Gamma_0 \Gamma_4 = A_4, \quad - i \Gamma_0 \Gamma_\mu = A_\mu,$$

nous obtenons l'équation

$$(7) \quad A_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z} - x i \lambda \Gamma_0 \right\} \psi.$$

Si nous cherchons par quelles relations sont liés les A , nous

voyons, en multipliant par Γ_0 les relations suivies par les Γ , que

$$\Lambda_\mu^3 = \Lambda_\mu, \quad \Lambda_\mu = \Lambda_\nu^2 \Lambda_\mu = \Lambda_\mu \Lambda_\nu^2 \quad \text{pour} \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

et que

$$1^\circ \text{ Si } \mu = 4, \nu \neq 4 \quad \Lambda_4 \Lambda_\nu - \Lambda_\nu \Lambda_4 = 0;$$

$$2^\circ \text{ Si } \mu \text{ et } \nu \text{ sont différents de } 4,$$

$$\Lambda_\mu \Lambda_\nu + \Lambda_\nu \Lambda_\mu = 0.$$

Si nous prenons le cas où $\lambda = +im_0c$, l'équation (7) devient

$$(8) \quad \Lambda_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \Lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c \Gamma_0 \psi$$

et avec son équation conjuguée transposée,

$$(9) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \Lambda_4 = \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \Lambda_1 + \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \Lambda_2 + \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \Lambda_3 - \frac{2\pi i}{h} m_0 c \psi^* \Gamma_0$$

donne l'équation de conservation

$$(10) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \Lambda_4 \psi) = \frac{\partial}{\partial x} (\psi^* \Lambda_1 \psi) + \frac{\partial}{\partial y} (\psi^* \Lambda_2 \psi) + \frac{\partial}{\partial z} (\psi^* \Lambda_3 \psi).$$

Posant

$$\psi^+ = i \psi^* \Gamma_0,$$

l'équation (9) donnera

$$(11) \quad \frac{\partial \psi^+}{\partial x_4} \Gamma_4 + \sum_p \frac{\partial \psi^+}{\partial x_p} \Gamma_p + \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi^+ = 0,$$

ce qui nous permet de faire correspondre aux grandeurs d'espace-temps $\psi^* \Lambda_\mu \psi$ le quadrivecteur d'univers

$$s_\mu = \psi^+ \Gamma_\mu \psi.$$

Nous pouvons également rendre hermitique l'opérateur de l'équation (5) en multipliant à gauche les deux membres de cette équation par une matrice Γ_5 telle que

$$(12) \quad \begin{aligned} \Gamma_5 \Gamma_4 + \Gamma_4 \Gamma_5 &= 0 \\ \Gamma_5 \Gamma_p &= \Gamma_p \Gamma_5 \quad (\Gamma_5)^2 = 1. \end{aligned}$$

Nous avons alors à partir de (5), que nous écrivons

$$i\Gamma_1 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_p \Gamma_p \frac{\partial \psi}{\partial x_p} - \frac{2\pi}{h} m_0 c \Gamma_5 \psi,$$

et en posant

$$B_\mu = i\Gamma_1 \Gamma_\mu \quad B_5 = \Gamma_5 \Gamma_1$$

l'équation d'ondes

$$(13) \quad B_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_p B_p \frac{\partial \psi}{\partial x_p} - \frac{2\pi}{h} m_0 c \Gamma_5 \psi,$$

dans laquelle $B_1, B_2, B_3, B_4, \Gamma_5$ sont hermitiques.

En raison des relations qui lient les Γ , nous obtenons entre les B les relations

$$(B_\mu)^3 = B_\mu, \quad B_\mu = B_\nu^2 B_\mu = B_\mu B_\nu^2 \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

et

$$\begin{aligned} 1^\circ & \quad p \text{ et } q \neq 4 & B_p B_q + B_q B_p = 0 \\ 2^\circ & \quad p \neq 4 & B_4 B_p = B_p B_4. \end{aligned}$$

L'équation (13) avec son équation conjuguée transposée

$$(14) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} B_4 = \sum_p \frac{\partial \psi^*}{\partial x_p} B_p - \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi^* \Gamma_5$$

donne la relation entre grandeurs

$$(15) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* B_4 \psi) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi^* B_i \psi) - \frac{2\pi}{h} m_0 c \psi^* \Gamma_5 \psi.$$

Au moyen de l'équation (14), on peut faire correspondre une équation adjointe à l'équation (13) en posant

$$\psi^+ = \psi^* \Gamma_5$$

sous la forme

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial x_4} \psi^+ \Gamma_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{\psi}^+ \Gamma_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \psi^+ \Gamma_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{\psi}^+ \Gamma_2 - \frac{2\pi}{h} m_0 c \bar{\psi}^+ = 0,$$

qui, avec l'équation (5), donne la relation entre grandeurs d'univers

$$(17) \quad \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\bar{\psi}^+ \Gamma_\mu \psi) - \frac{2\pi}{h} m_0 c \bar{\psi}^+ \psi = 0,$$

correspondant à la relation (15).

3. Transformation de Lorentz. — Pour examiner comment se comportent au point de vue de la variance relativiste les densités de moyenne des éléments de matrices que l'on peut former au moyen des Γ , des A ou des B , il est nécessaire de rechercher comment se transforme la grandeur ϕ dans une transformation de Lorentz.

Si l'on cherche cette transformation de manière à conserver simultanément, soit les équations (8), (9) et (10), soit les équations (5), (16) et (17), on est amené à chercher une solution $T_{\mu\nu}$ pour l'équation

$$\Gamma_{\lambda} T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \Gamma_{\lambda} = \delta_{\mu\lambda} \Gamma_{\nu} - \delta_{\lambda\nu} \Gamma_{\mu}.$$

On trouve alors facilement

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu}),$$

car on a

1° Pour $\lambda = \mu = \nu$:

$$\Gamma_{\lambda} T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \Gamma_{\lambda} = \frac{1}{2} \Gamma_{\lambda} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} - \frac{1}{2} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} \Gamma_{\lambda} = 0;$$

2° Pour $\lambda = \mu \neq \nu$:

$$\Gamma_{\mu} T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \Gamma_{\mu} = \frac{1}{2} \Gamma_{\mu}^2 \Gamma_{\nu} - \frac{1}{2} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} = \Gamma_{\mu}^2 \Gamma_{\nu} - \Gamma_{\nu}.$$

De ceci, on déduit la transformation infinitésimale S , de la substitution subie par les ϕ , correspondant à la rotation infinitésimale

$$\mathcal{X}'_{\mu} = I + \sum_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \mathcal{X}_{\nu} \quad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$$

sous la forme

$$S = I + \frac{1}{2} \sum_{(\mu\nu)} \varepsilon_{(\mu\nu)} T_{\mu\nu} = I + \frac{1}{2} \sum_{(\mu\nu)} \varepsilon_{(\mu\nu)} \frac{1}{2} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu},$$

transformation pour laquelle nous avons

$$S^{-1} \Gamma_{\mu} S = O_{\mu\nu} \Gamma_{\nu}.$$

A un opérateur $\mathfrak{K}(\Gamma)$ correspondront donc deux densités de

valeur moyenne, ayant même variance relativiste que nous écrirons

$$\psi^+ \mathfrak{R}(\Gamma) \psi$$

et

$$\overline{\psi^+ \mathfrak{R}(\Gamma) \psi}$$

en grandeurs d'univers, conduisant aux deux grandeurs d'espace-temps

$$\psi^* \Gamma \mathfrak{R}(\Gamma) \psi$$

et

$$\psi^* \Gamma \mathfrak{R}(\Gamma) \psi.$$

4. Équations d'ondes complémentaires. — Nous pouvons également pour ce corpuscule définir un corpuscule complémentaire dont les états de masse propre nulle correspondent aux états de masse propre différente de zéro du premier et réciproquement.

L'opérateur S' de l'équation d'onde d'univers de ce corpuscule sera lié à l'opérateur $S = \Sigma_{\mu} \Gamma_{\mu} p_{\mu}$, si on l'écrit $S' = \Sigma_{\mu} \mathbf{J}_{\mu} p_{\mu}$, par les relations

$$a) \quad S^2 + S'^2 = \square = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2.$$

$$b) \quad SS' \equiv S'S = 0;$$

multipliant (a) par S ou S' , en tenant compte de (b), nous obtenons

$$S^3 = S \square$$

$$S'^3 = S' \square.$$

En identifiant les termes en p_{μ} dans les relations (a) et (b) on obtient entre les Γ_{μ} et les $\mathbf{J}_{\mu}$ les relations

$$c) \quad \Gamma_{\mu}^2 + \mathbf{J}_{\mu}^2 = 1.$$

$$d) \quad \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} + \mathbf{J}_{\mu} \mathbf{J}_{\nu} + \mathbf{J}_{\nu} \mathbf{J}_{\mu} = 0.$$

$$e) \quad \Gamma_{\mu} \mathbf{J}_{\mu} = 0.$$

$$f) \quad \Gamma_{\mu} \mathbf{J}_{\nu} + \Gamma_{\nu} \mathbf{J}_{\mu} = 0.$$

$$g) \quad \mathbf{J}_{\mu} \Gamma_{\nu} + \mathbf{J}_{\nu} \Gamma_{\mu} = 0.$$

La relation (c) nous montre immédiatement que

$$\mathbf{J}_{\mu}^3 = \mathbf{J}_{\mu}.$$

La relation (d) donne avec $\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 0$

$$J_\nu J_\nu + J_\nu J_\nu = 0.$$

Si nous reportons la valeur $\Gamma_\mu^2 = 1 - J_\mu^2$ dans la relation $\Gamma_\nu = \Gamma_\nu \Gamma_\mu^2$, nous obtenons

$$\Gamma_\nu = \Gamma_\nu - \Gamma_\nu J_\mu^2;$$

d'où

$$\Gamma_\nu J_\mu^2 = 0.$$

qui multiplié à droite par J_μ donne

$$\Gamma_\nu J_\mu = 0.$$

De même

$$J_\mu \Gamma_\nu = 0.$$

De ces relations, il résulte que $\Gamma_\mu^2 J_\nu = 0$;
d'où

$$(1 - J_\mu^2) J_\nu = 0$$

et

$$J_\nu = J_\mu^2 J_\nu = J_\nu J_\mu^2.$$

Le système des J satisfait donc aux trois relations

$$\begin{aligned} J_\mu^3 &= J_\mu \\ J_\mu &= J_\mu J_\nu^2 = J_\nu^2 J_\mu \\ J_\mu J_\nu + J_\nu J_\mu &= 0 \end{aligned}$$

et il est lié au système des Γ par

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^2 + J_\mu^2 &= 1 \\ \Gamma_\mu J_\mu &= J_\mu \Gamma_\mu = 0 \\ \Gamma_\nu J_\mu &= J_\nu \Gamma_\mu = 0. \end{aligned}$$

On peut dire que les deux systèmes de matrices Γ et J sont totalement orthogonaux.

5. Construction de Γ_0 et Γ_5 . — La connaissance de ces relations va nous permettre de construire les matrices Γ_0 et Γ_5 que nous avons introduites antérieurement.

Pour ceci, nous poserons

$$\Gamma_0 = \Gamma_4 + J_4$$

et les formules précédentes nous permettent de voir facilement que

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \Gamma_0^2 = \Gamma_4^2 + J_4^2 = 1 \\ 2^\circ \quad & \Gamma_0 \Gamma_4 = \Gamma_4^2 + J_4 \Gamma_4 = \Gamma_4^2 = \Gamma_4 \Gamma_0 \\ 3^\circ \quad & \Gamma_0 \Gamma_\nu = \Gamma_4 \Gamma_\nu + J_4 \Gamma_\nu = \Gamma_4 \Gamma_\nu \\ & \Gamma_\nu \Gamma_0 = \Gamma_\nu \Gamma_4 + \Gamma_\nu J_4 = \Gamma_\nu \Gamma_4; \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \Gamma_0 \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_0 = 0.$$

De même, nous construisons Γ_5 en posant

$$\Gamma_5 = i \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 + i J_1 J_2 J_3$$

et l'on constate facilement que les relations que nous avons imposées à Γ_5 sont vérifiées.

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} A_4 &= \Gamma_0 \Gamma_4 = \Gamma_4^2 \\ A_\mu &= i \Gamma_0 \Gamma_\mu = -i \Gamma_4 \Gamma_\mu \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_4 &= i \Gamma_5 \Gamma_4 = i \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \\ B_\mu &= \Gamma_5 \Gamma_\mu = i \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_\mu \end{aligned}$$

qui se réduit à

$$B_1 = i \Gamma_2 \Gamma_3, \quad B_2 = i \Gamma_3 \Gamma_1, \quad B_3 = i \Gamma_1 \Gamma_2$$

Si nous examinons la grandeur d'univers $\phi^+ J_\mu \phi$, où les ϕ sont des solutions de l'équation en Γ_μ , pour étudier la variance de cette expression nous devons calculer

$$S^{-1} J_\mu S.$$

Or, nous avons vu que pour une rotation infinitésimale

$$S = 1 + \frac{1}{2} \sum_{(\mu\nu)} \varepsilon_{(\mu\nu)} \frac{1}{2} \Gamma_\mu \Gamma_\nu;$$

d'où

$$S^{-1} J_\lambda S = J_\lambda + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} J_\lambda \Gamma_\mu \Gamma_\nu - \frac{1}{2} \Gamma_\mu \Gamma_\nu J_\lambda \right) = J_\lambda$$

car

$$J_\lambda \Gamma_\mu = 0.$$

De $S^{-1} \mathbf{J}_\lambda S = \mathbf{J}_\lambda$, on déduit que $\mathbf{J}_\lambda$ est un invariant pour une transformation de Lorentz et il en sera de même pour toutes les grandeurs $\psi^{+\mathbb{R}}(\mathbf{J})\psi$ où $\mathbb{R}$ est un opérateur formé par combinaison des $\mathbf{J}$.

Nous savons déjà que

$\psi^+\psi$ et $\bar{\psi}^+\psi$ sont des invariants qui en grandeurs d'espace-temps s'écrivent

$$\psi^+\psi = i\psi^*(\Gamma_4 + J_1)\psi$$

et

$$\bar{\psi}^+\psi = \psi^*\Gamma_3\psi = \psi^*(i\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 + iJ_1J_2J_3)\psi$$

et sont distincts des invariants

$$i\psi^*\Gamma_1\psi \quad \text{et} \quad \psi^*(i\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3)\psi.$$

Il existe également un autre invariant : c'est la grandeur Λ_0 que nous avons définie au début de ce chapitre et telle que

$$\Lambda_0\Gamma_\mu = \Gamma_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4,$$

car on voit facilement que

$$S^{-1}\Lambda_0 S = \Lambda_0.$$

6. Intégrales premières. — Spin. — Nous définirons l'intégrale première de la même façon que dans le cas du corpuscule étudié précédemment, en disant qu'une grandeur est intégrale première lorsque l'opérateur $\mathbf{C}$ correspondant satisfait aux deux conditions

$$\mathbf{C}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{C} = 0$$

$$\Lambda_4\mathbf{C} = \mathbf{C}\Lambda_4$$

l'équation d'ondes étant écrite

$$\frac{1}{c}\Lambda_4\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathbf{H}\psi.$$

Nous pouvons alors définir le spin du corpuscule. En utilisant les mêmes relations que pour le corpuscule précédent, les

opérateurs de spin S doivent être solutions d'un système d'équations qui pour la composante S_z s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} S_z A_1 - A_1 S_z = \frac{h}{2\pi i} A_2 \\ S_z A_2 - A_2 S_z = -\frac{h}{2\pi i} A_1 \\ S_z A_3 - A_3 S_z = 0 \\ S_z \Gamma_0 - \Gamma_0 S_z = 0 \end{array} \right.$$

sous la condition

$$A_4 S_z = S_z A_4$$

On aperçoit immédiatement pour ce système la solution

$$S_z = -\frac{h}{2\pi i} \frac{1}{2} A_1 A_2 = -\frac{h}{4\pi} i A_1 A_2$$

Or

$$(i A_1 A_2)^2 = i A_4 A_2.$$

Par suite, les valeurs propres de S_z correspondant aux cas purs du spin sont

$$+ \frac{h}{4\pi}, \quad - \frac{h}{4\pi}, \quad 0.$$

Par permutations circulaires, nous obtenons

$$S_x = \frac{h}{4\pi} [i A_2 A_3]$$

$$S_y = \frac{h}{4\pi} [i A_3 A_4]$$

$$S_z = \frac{h}{4\pi} [i A_1 A_2]$$

et l'on voit facilement que

$$\psi^* \vec{S} \psi = \frac{h}{4\pi} \psi^* \Gamma_0 \Gamma_\mu \Gamma_\nu \psi = \frac{h}{4\pi} \psi^* \Gamma_4 \Gamma_\mu \Gamma_\nu \psi$$

se transforme comme une composante d'un tenseur antisymétrique du troisième ordre, c'est-à-dire comme un vecteur d'espace.

CHAPITRE IV

ETUDE D'UNE REPRESENTATION DU CORPUSCULE
DU PREMIER TYPE

Nous avons au chapitre II étudié les grandeurs attachées au corpuscule dont l'équation d'ondes s'écrit

$$(1) \quad \left(\Gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2\pi}{h} m_0 c \right) \psi = 0,$$

les Γ étant des matrices liées par les relations

$$(2) \quad \begin{aligned} (\Gamma_\mu)^3 &= \Gamma_\mu, & \Gamma_\mu \Gamma_\nu^2 + \Gamma_\nu^2 \Gamma_\mu &= \Gamma_\mu \\ \mu, \nu, \lambda &= 1, 2, 3, 4 & \Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\lambda + \Gamma_\lambda \Gamma_\nu \Gamma_\mu &= 0, \end{aligned}$$

sans préciser la forme ni le rang de ces matrices.

Dans ce chapitre, nous allons utiliser une détermination particulière des matrices Γ de telle sorte que nous pourrions préciser en les particularisant les propriétés examinées au chapitre II.

1. Représentation des matrices Γ_μ . — Nous allons montrer que l'on obtient une représentation convenable pour les Γ_μ sous la forme des matrices à seize lignes et seize colonnes qui s'écrivent dans une numération à deux séries d'indices variant d'un à quatre :

$$(3) \quad (\Gamma_\mu)_{ik,lm} = \frac{1}{2} [(\gamma_\mu)_{il} \delta_{km} + (\gamma_\mu)_{km} \delta_{il}],$$

les γ_μ étant une série de matrices anticommutantes à quatre lignes et quatre colonnes telles que

$$(4) \quad (\gamma_\mu)^2 = 1 \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 0 \quad (\mu \neq \nu),$$

c'est-à-dire une série de matrices de Dirac.

Nous dirons que $(\Gamma_\mu)_{ik,lm}$ dérive de la matrice γ_μ de Dirac par l'opération de « fusion symétrique » au moyen de la matrice δ .

Pour simplifier l'écriture dans ce qui va suivre, nous désignerons par γ_μ la représentation en il de γ_μ , $(\gamma_\mu)_{il}$, et par $\bar{\gamma}_\mu$ la représentation en k, m , $(\gamma_\mu)_{km}$ de cette même matrice.

Par suite, nous pourrions écrire

$$(\Gamma_\mu)_{ik,lm} = \frac{1}{2} (\gamma_\mu \bar{\delta} + \bar{\gamma}_\mu \delta).$$

Nous devons maintenant montrer que Γ_μ ainsi choisie sous la forme (3) satisfait aux relations (2).

Ces propriétés résultent d'un calcul simple en utilisant les relations entre γ_μ et $\bar{\gamma}_\mu$:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu + \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu = 2\bar{\delta}_{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu \bar{\gamma}_\nu = \bar{\gamma}_\nu \gamma_\mu.$$

La première des relations (2), $(\Gamma_\mu)^3 = \Gamma_\mu$ nous montre que les valeurs propres des Γ_μ sont les racines de l'équation caractéristique

$$\lambda^3 - \lambda = 0,$$

c'est-à-dire

$$0, \quad +1, \quad -1.$$

Si l'on considère alors une représentation dans laquelle la matrice déterminée γ_μ est diagonale, il en est de même pour Γ_μ .

Or, on sait qu'une matrice de Dirac γ_μ sous forme diagonale présente deux valeurs $+1$ et deux valeurs -1 . Une valeur propre 0 de Γ_μ correspondra soit à ± 1 pour γ_μ et -1 pour $\bar{\gamma}_\mu$, soit à -1 pour γ_μ , et $+1$ pour $\bar{\gamma}_\mu$. On voit que ceci est possible de huit manières différentes, tandis qu'une valeur $+1$ ou -1 de Γ_μ devant résulter d'un couple $+1, +1$, ou $-1, -1$ ne peut être obtenue que de quatre manières distinctes.

Nous aurons donc dans notre représentation de Γ_μ autant d'états 0 que d'états différents de zéro.

La relation $\Gamma_\mu^3 = \Gamma_\mu$ donne également $(\Gamma_\mu)^4 = \Gamma_\mu^2$; $(\Gamma_\mu)^2$ est donc une matrice idempotente. Or, on sait ⁽¹⁾ que si F est

(1) JORDAN, *Quantenmechanik*, p. 46.

idempotente, il en est de même de $1 - F$. Par suite de

$$(\Gamma_\mu)^2 = \frac{1}{2} (1 + \gamma_\mu \bar{\gamma}_\mu),$$

on déduit que

$$(J_\mu)^2 = \frac{1}{2} (1 - \gamma_\mu \bar{\gamma}_\mu)$$

est également idempotente.

On voit ici s'introduire la matrice J_μ telle que

$$J_\mu = \frac{1}{2} (\gamma_\mu \bar{\delta} - \bar{\gamma}_\mu \delta).$$

Cette matrice possède tous les caractères que nous avons attribués à la matrice complémentaire de Γ_μ . Par exemple, on constate facilement que

$$\Gamma_\mu J_\mu = \frac{1}{4} (\delta \bar{\delta} - \gamma_\mu \bar{\gamma}_\mu + \bar{\gamma}_\mu \gamma_\mu - \delta \bar{\delta}) = 0.$$

Le système des J_μ satisfait d'ailleurs aux relations

$$(J_\mu)^3 = J_\mu, \quad J_\mu J_\nu^2 + J_\nu^2 J_\mu = J_\mu, \quad J_\mu J_\nu J_\lambda + J_\lambda J_\nu J_\mu = 0.$$

Une matrice C_μ introduite précédemment d'une manière formelle s'écrit

$$C_\mu = \gamma_\mu \bar{\gamma}_\mu.$$

2. Séparation du temps. — Nous allons utiliser la forme de ces matrices pour séparer le terme de temps des termes d'espace dans notre équation d'ondes suivant les deux modes que nous avons introduits antérieurement.

Le premier de ces procédés consiste à multiplier l'équation (1) écrite sous la forme

$$(6) \quad i\Gamma_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2\pi}{h} m_0 c \right) \psi$$

par

$$-iA_0 = -i(\gamma_4)(\bar{\gamma}_4).$$

Posant

$$\begin{aligned} A_0 \Gamma_4 &= \frac{1}{2} \gamma_4 \bar{\gamma}_4 (\gamma_4 \bar{\delta} + \bar{\gamma}_4 \delta) = \frac{1}{2} (\bar{\gamma}_4 \delta + \gamma_4 \bar{\delta}) = A_4 \\ -i A_0 \Gamma_p &= -i \frac{1}{2} \gamma_4 \bar{\gamma}_4 (\gamma_p \bar{\delta} + \bar{\gamma}_p \delta) = -\frac{1}{2} [(i \gamma_4 \gamma_p) \bar{\gamma}_4 + (i \bar{\gamma}_4 \bar{\gamma}_p) \gamma_4] = A_p \end{aligned}$$

et en utilisant une représentation des γ au moyen des α de Dirac telle que

$$\gamma_i = \alpha_i, \quad \gamma_4 = i \alpha_4, \quad i \alpha_i \alpha_p \quad p = 1, 2, 3,$$

nous obtenons

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} A_4 &= \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_4 \delta + \alpha_4 \bar{\delta}) \\ A_p &= \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_4 \alpha_p + \alpha_4 \bar{\alpha}_p). \end{aligned} \right.$$

L'équation d'ondes correspondant aux états de masse propre $+m_0 c$ s'écrira donc

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} (\alpha_4 \bar{\delta} + \bar{\alpha}_4 \delta) \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= \left[\sum_p \frac{1}{2} (\alpha_p \bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_p \alpha_4) \frac{\partial}{\partial x_p} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c \alpha_4 \bar{\alpha}_4 \right] \psi, \end{aligned} \right.$$

tandis que celle correspondant aux états de masse propre nulle se réduira à

$$(9) \quad \frac{1}{2} [\alpha_4 \bar{\delta} + \bar{\alpha}_4 \delta] \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_p \frac{1}{2} (\alpha_p \bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_p \alpha_4) \frac{\partial \psi}{\partial x_p}.$$

Nous pouvons également, pour séparer la variable de temps, utiliser le deuxième procédé que nous avons indiqué.

La matrice B_0 s'écrit ici

$$(10) \quad B_0 = [i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3] [i \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3];$$

d'où

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} B_4 &= i B_0 \Gamma_4 = -\frac{1}{2} [(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4) (\bar{i} \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3) + (\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3 \gamma_4) (i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)] \\ &= \frac{1}{2} [(i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) (\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 \alpha_4) + (\bar{i} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)] \\ B_p &= i B_0 \Gamma_p = \frac{1}{2} [(i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_p) (\bar{i} \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3) + (\bar{i} \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3 \gamma_p) (i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)] \end{aligned} \right.$$

qui se réduit pour $p = 1, 2, 3$ à

$$B_1 = \frac{1}{2} [(i\alpha_2\alpha_3) (\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}) + (\overline{i\alpha_2\alpha_3}) (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)]$$

$$B_2 = \frac{1}{2} [(i\alpha_3\alpha_1) (\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}) + (\overline{i\alpha_3\alpha_1}) (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)]$$

$$B_3 = \frac{1}{2} [(i\alpha_1\alpha_2) (\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}) + (\overline{i\alpha_1\alpha_2}) (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)].$$

Nous obtenons donc l'équation d'ondes

$$(12) \quad B_1 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ \sum_p B_p \frac{\partial}{\partial x_p} - \frac{2\pi}{h} m_0 c [\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4] (\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}) \right\} \psi$$

pour les états de masse propre différente de zéro et

$$(13) \quad B_1 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\sum_p B_p \frac{\partial}{\partial x_p} \right] \psi$$

pour les états de masse propre nulle.

3. Équations complémentaires. — A l'équation (1) et à l'équation correspondante pour les états de masse propre nulle se trouvent attachées les deux équations complémentaires

$$(14) \quad iJ_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[J_1 \frac{\partial}{\partial x} + J_2 \frac{\partial}{\partial y} + J_3 \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi$$

et

$$(15) \quad iJ_1 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[J_1 \frac{\partial}{\partial x} + J_2 \frac{\partial}{\partial y} + J_3 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2\pi}{h} m_0 c \right] \psi.$$

Nous séparons le temps dans ces équations de la même manière que pour l'équation (6), au moyen de A_0 ou de B_0 .

D'où les deux équations d'ondes

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} [(\bar{\alpha}_4) \delta - (\alpha_4) \bar{\delta}] \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ = \left\{ \sum_p \frac{1}{2} [(\bar{\alpha}_4) (\alpha_p) - (\alpha_4) (\bar{\alpha}_p)] \frac{\partial}{\partial x_p} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c (\alpha_4) (\bar{\alpha}_4) \right\} \psi \end{array} \right.$$

et

$$(17) \quad \frac{1}{2} [(\bar{\alpha}_4) \delta - (\alpha_4) \bar{\delta}] \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ \sum_p \frac{1}{2} [(\bar{\alpha}_1) (\alpha_p) - (\alpha_1) (\bar{\alpha}_p)] \frac{\partial}{\partial x_p} \right\} \psi$$

complémentaires de (8) et (9).

4. *Solutions ondes planes monochromatiques.* — La connaissance de la forme exacte de nos équations d'ondes va nous permettre d'en examiner les solutions représentables par une onde plane monochromatique

$$\psi_{iR} = a_{iR} e^{\frac{2\pi i}{h} [wt - (p_1 x + p_2 y + p_3 z)]}$$

Si nous substituons cette valeur dans l'équation (8), nous obtenons pour déterminer les amplitudes a_{iR} le système

$$\left[\frac{w}{c} \Lambda_4 + \sum_p \Lambda_p p_p - \Lambda_0 m_0 c \right] a_{iR} = 0,$$

système qui s'écrit, si nous posons

$$\frac{w}{c} = w', \quad m_0 c = \lambda, \quad \frac{1}{2} p_3 = p',$$

$$\frac{1}{2} (p_1 + i p_2) = p'^+, \quad \frac{1}{2} (p_1 - i p_2) = p'^-$$

et en séparant les équations indépendantes du temps,

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} [w' + \lambda] a_{41} + p'^+ [a_{44} + a_{41}] + p'_3 [a_{43} + a_{31}] = 0 \\ [w' + \lambda] a_{42} + p'^- a_{43} + p'^+ a_{42} - p'_3 [a_{44} - a_{32}] = 0 \\ [w' + \lambda] a_{21} + p'^+ a_{24} + p'^- a_{31} + p'_3 [a_{44} - a_{41}] = 0 \\ [w' + \lambda] a_{22} + p'^- [a_{23} + a_{32}] - p'_3 [a_{24} + a_{42}] = 0 \\ [w' - \lambda] a_{33} + p'^- a_{23} + p'^+ a_{32} + p'_3 [a_{43} + a_{31}] = 0 \\ [w' - \lambda] a_{34} + p'^+ a_{24} + p'^- a_{31} + p'_3 [a_{44} - a_{32}] = 0 \\ [w' - \lambda] a_{43} + p'^- a_{43} + p'^+ a_{43} - p'_3 [a_{23} - a_{41}] = 0 \\ [w' - \lambda] a_{44} + p'^- [a_{44} + a_{41}] - p'_3 [a_{24} + a_{42}] = 0 \end{array} \right.$$

et

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \lambda a_{43} - p'^+ [a_{42} - a_{43}] - p'_3 [a_{44} - a_{33}] = 0 \\ \lambda a_{44} - p'^- a_{41} + p'^+ a_{44} + p'_3 [a_{42} + a_{34}] = 0 \\ \lambda a_{23} - p'^+ a_{22} + p'^- a_{33} - p'_3 [a_{21} + a_{43}] = 0 \\ \lambda a_{24} - p'^- [a_{21} - a_{34}] - p'_3 [a_{22} - a_{44}] = 0 \\ \lambda a_{31} - p'^+ [a_{21} - a_{34}] - p'_3 [a_{44} - a_{33}] = 0 \\ \lambda a_{32} - p'^+ a_{22} + p'^- a_{33} - p'_3 [a_{42} + a_{34}] = 0 \\ \lambda a_{41} - p'^- a_{41} + p'^+ a_{44} + p'_3 [a_{21} + a_{43}] = 0 \\ \lambda a_{42} - p'^- [a_{42} - a_{43}] + p'_3 [a_{22} - a_{44}] = 0. \end{array} \right.$$

La résolution de ce système, qui au premier abord semble assez ardue, se simplifie en supposant que l'onde plane ψ_{ik} se dirige dans la direction de l'axe oz , de telle sorte que $p_x = p_y = 0$. Pour revenir de la solution correspondant à ce cas particulier à celle du cas général, il suffira de faire subir aux axes une rotation d'espace. Nous aurons alors le ψ correspondant aux nouveaux axes en appliquant à la solution précédente la transformation S que nous avons déterminée antérieurement.

Si nous examinons ce système d'équations linéaires et homogènes, nous constatons facilement que si l'énergie et l'impulsion sont liées par la relation

$$u^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

la solution dépendra de quatre paramètres arbitraires.

Nous pourrions donc nous donner arbitrairement quatre des a_{ik} en fonction desquels nous évaluerons les autres.

Nous allons examiner la forme des solutions suivant deux modes différents de choix des fonctions constantes.

Le choix le plus simple de celles-ci consiste à poser

$$a_{13} = C_1, \quad a_{14} = C_2, \quad a_{23} = C_3, \quad a_{24} = C_4.$$

Le système (II) donne alors

$$\begin{aligned} a_{31} = a_{13} = C_1 & & a_{32} = -a_{44} = -C_2 \\ a_{41} = -a_{23} = -C_3 & & a_{42} = a_{21} = C_4 \end{aligned}$$

tandis que le système (I) donne avec ces valeurs

$$\begin{aligned} a_{41} &= -C_1 \frac{p_3}{\Delta_1} & a_{33} &= -C_1 \frac{p_3}{\Delta_2} \\ a_{12} &= C_2 \frac{p_3}{\Delta_1} & a_{34} &= -C_2 \frac{p_3}{\Delta_2} \\ a_{21} &= -C_3 \frac{p_3}{\Delta_1} & a_{43} &= C_3 \frac{p_3}{\Delta_2} \\ a_{22} &= C_4 \frac{p_3}{\Delta_1} & a_{44} &= C_4 \frac{p_3}{\Delta_2} \end{aligned}$$

en posant

$$\Delta_1 = \frac{W}{c} + m_0 c \quad \Delta_2 = \frac{W}{c} - m_0 c,$$

Δ_1 et Δ_2 étant liés par la relation

$$\Delta_1 \Delta_2 = p_3^2$$

Avec ce choix des fonctions constantes, nous voyons que les ondes solutions se répartissent en trois groupes.

D'une part, un groupe de huit ondes constantes, d'autre part, deux groupes, que l'on peut écrire

$$\pm \tilde{C} \frac{p}{\Delta_1} \quad \text{et} \quad \pm \tilde{C} \frac{p}{\Delta_2}$$

Si nous supposons l'énergie $W > 0$, nous avons $|\Delta_1| > |\Delta_2|$. Si alors W est voisin de $m_0 c^2$, les ondes en $\tilde{C} \frac{p}{\Delta_2}$ l'emporteront de beaucoup en amplitude sur les ondes en $\tilde{C} \frac{p}{\Delta_1}$ et si en particulier le mouvement du corpuscule est voisin du repos, nous aurons

$$\frac{p}{\Delta_1} = \frac{p}{\frac{W}{c} + m_0 c} \rightarrow \frac{p}{2 m_0 c} \rightarrow 0$$

et

$$\frac{p}{\Delta_2} = \frac{p}{\frac{W}{c} - m_0 c} \rightarrow \frac{2 m_0 c}{p} \rightarrow \infty.$$

Si, au contraire, $W < 0$, de $|\Delta_2| > |\Delta_1|$ nous déduisons que les ondes en $\tilde{C} \frac{p}{\Delta_1}$ l'emporteront en amplitude sur celles en $\tilde{C} \frac{p}{\Delta_2}$ et au voisinage du repos

$$\frac{p}{\Delta_1} = \frac{p}{-\frac{W}{c} + m_0 c} \rightarrow -\frac{2 m_0 c}{p} \rightarrow -\infty$$

$$\frac{p}{\Delta_2} = \frac{p}{-\frac{|W|}{c} - m_0 c} \rightarrow -\frac{p}{2 m_0 c} \rightarrow 0.$$

Nous avons donc pour nos ondes planes les trois classes suivantes :

1° Les ondes dont l'amplitude ne dépend pas de W :

$$\alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{41}, \alpha_{42}.$$

Leurs indices correspondent à ceux pour lesquels la valeur correspondante de A_4 est nulle.

2° Les ondes dont l'amplitude est prépondérante lorsque W est > 0 :

$$\alpha_{33}, \alpha_{34}, \alpha_{43}, \alpha_{44}.$$

Leurs indices correspondent à ceux pour lesquels $(A_4)_{ik, ik}$ est égal à $+1$.

3° Les ondes qui l'emportent en amplitude lorsque $W < 0$. Ce sont

$$\alpha_{14}, \alpha_{12}, \alpha_{24}, \alpha_{22}$$

dont les indices correspondent aux valeurs -1 de A_4 .

Il est intéressant d'examiner ce qui se passe lorsque dans les formules précédentes on fait tendre m_0 vers 0 de telle sorte que $m_0 c$ tend vers 0, W et p restant finis.

On a encore

$$\begin{aligned} \alpha_{43} &= \alpha_{31} = C_1 & \alpha_{14} &= -\alpha_{32} = C_2 \\ \alpha_{23} &= -\alpha_{41} = C_3 & \alpha_{24} &= \alpha_{42} = C_4 \end{aligned}$$

et les ondes des deuxième et troisième classes prennent les valeurs

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{33} = -C_1 & \alpha_{21} &= -\alpha_{43} = -C_3 \\ \alpha_{12} &= -\alpha_{34} = C_2 & \alpha_{22} &= \alpha_{44} = C_4. \end{aligned}$$

Les ondes se répartissent alors en quatre groupes formés chacun de quatre ondes d'amplitudes $\vec{C}_i$ pour deux d'entre elles et $-\vec{C}_i$ pour les deux autres.

Nous allons maintenant examiner un autre choix des quatre

ondes constantes, lequel nous conduira à un résultat intéressant.

Prenons comme constantes les ondes dont les coefficients sont $\frac{W}{c} - m_0 c$, soient

$$a_{33} = C_1, \quad a_{34} = C_2, \quad a_{43} = C_3, \quad a_{44} = C_4$$

nous en déduisons facilement les relations

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\Delta_2}{\Delta_1} C_1, & a_{12} &= -\frac{\Delta_2}{\Delta_1} C_2 \\ a_{21} &= -\frac{\Delta_2}{\Delta_1} C_3, & a_{22} &= \frac{\Delta_2}{\Delta_1} C_4 \end{aligned}$$

au moyen du système (I), tandis que le système (II) donne

$$\begin{aligned} a_{13} &= a_{31} = -\frac{p_3}{\Delta_1} C_1, & a_{23} &= -a_{41} = \frac{p_3}{\Delta_1} C_3 \\ a_{32} &= -a_{44} = \frac{p_3}{\Delta_1} C_2, & a_{24} &= a_{42} = \frac{p_3}{\Delta_1} C_4 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{p_3^2}{\Delta_1^2} C_1, & a_{12} &= -\frac{p_3^2}{\Delta_1^2} C_2 \\ a_{21} &= -\frac{p_3^2}{\Delta_1^2} C_3, & a_{22} &= \frac{p_3^2}{\Delta_1^2} C_4. \end{aligned}$$

Si maintenant nous considérons les solutions ondes planes monochromatiques de deux équations de Dirac en l'absence de champ, ces solutions s'expriment au moyen de deux d'entre elles prises constantes.

Nous avons, en désignant par α_i et β_i ($i = 1, 2, 3$) les amplitudes ⁽¹⁾ de ces ondes,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{p A_1}{\Delta_1}, & \alpha_2 &= \frac{p B_1}{\Delta_1}, & \alpha_3 &= A_1, & \alpha_4 &= B_1 \\ \beta_1 &= -\frac{p A_2}{\Delta_1}, & \beta_2 &= \frac{p B_2}{\Delta_1}, & \beta_3 &= A_2, & \beta_4 &= B_2. \end{aligned}$$

(1) L. DE BROGLIE, *Une nouvelle conception de la lumière*, p. 12.

Si nous considérons les produits deux à deux de ces ondes, de la forme $\alpha_i \beta_k$, nous avons

$$\alpha_1 \beta_1 = \frac{p^2}{\Delta_1^2} A_1 A_2; \quad \alpha_1 \beta_2 = -\frac{p^2}{\Delta_1^2} A_1 B_2; \quad \alpha_1 \beta_3 = -\frac{p}{\Delta_1} A_1 A_2;$$

$$\alpha_1 \beta_4 = -\frac{p}{\Delta_1} A_1 B_2$$

$$\alpha_2 \beta_1 = -\frac{p^2}{\Delta_1^2} A_2 B_1; \quad \alpha_2 \beta_2 = \frac{p^2}{\Delta_1^2} B_1 B_2; \quad \alpha_2 \beta_3 = -\frac{p}{\Delta_1} B_1 A_2;$$

$$\alpha_2 \beta_4 = \frac{p}{\Delta_1} B_1 B_2$$

$$\alpha_3 \beta_1 = -\frac{p}{\Delta_1} A_1 A_2; \quad \alpha_3 \beta_2 = \frac{p}{\Delta_1} A_1 B_2; \quad \alpha_3 \beta_3 = A_1 A_2; \quad \alpha_3 \beta_4 = A_1 B_2$$

$$\alpha_4 \beta_1 = -\frac{p}{\Delta_1} B_1 A_2; \quad \alpha_4 \beta_2 = \frac{p}{\Delta_1} B_1 B_2; \quad \alpha_4 \beta_3 = B_1 A_2; \quad \alpha_4 \beta_4 = B_1 B_2.$$

En posant, par analogie avec le tableau des a_{ik}

$$A_1 A_2 = C_1, \quad A_1 B_2 = C_2, \quad B_1 A_2 = C_3, \quad B_1 B_2 = C_4,$$

nous obtenons

$$\alpha_3 \beta_3 = C_1; \quad \alpha_3 \beta_4 = C_2; \quad \alpha_4 \beta_3 = C_3; \quad \alpha_4 \beta_4 = C_4$$

$$\alpha_1 \beta_1 = \frac{p^2}{\Delta_1^2} C_1; \quad \alpha_1 \beta_2 = -\frac{p^2}{\Delta_1^2} C_2$$

$$\alpha_2 \beta_1 = -\frac{p^2}{\Delta_1^2} C_3; \quad \alpha_2 \beta_2 = \frac{p^2}{\Delta_1^2} C_4$$

$$\alpha_4 \beta_3 = \alpha_3 \beta_4 = -\frac{p}{\Delta_1} C_1; \quad \alpha_3 \beta_2 = -\alpha_1 \beta_4 = \frac{p}{\Delta_1} C_2$$

$$\alpha_2 \beta_3 = -\alpha_4 \beta_1 = \frac{p}{\Delta_1} C_3; \quad \alpha_2 \beta_4 = \alpha_1 \beta_2 = \frac{p}{\Delta_1} C_4.$$

Nous voyons alors que le tableau des a_{ik} est identique au tableau des $\alpha_i \beta_k$. Par suite :

Toute solution a_{ik} peut s'interpréter comme étant le produit des solutions α_i et β_k de deux équations de Dirac, correspondant à des ondes planes monochromatiques de même énergie et de même impulsion.

Nous voyons ici apparaître nettement la différence qui sépare

l'exemple de représentation des matrices Γ_ν que nous avons choisies, de la théorie du photon de M. Louis de Broglie. Dans celle-ci, une solution apparaît comme le produit des solutions d'une équation de Dirac et de l'équation de l'anti-corpuscule correspondant, c'est-à-dire de l'équation conjuguée.

5. Solution de l'équation d'ondes du corpuscule à masse nulle. — Nous n'avons considéré jusqu'ici que le cas où l'équation d'ondes correspondait à des valeurs propres de la masse non nulles, et si nous avons considéré le cas de masse nulle, c'est comme cas limite d'une masse finie devenant infiniment petite. Ce cas est distinct de celui dans lequel la masse propre est nulle. L'équation d'ondes s'écrit alors

$$\Lambda_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \sum_{\nu} \Lambda_{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}}.$$

Dans ce cas, pour une onde plane monochromatique

$$\psi_{ih} = \alpha_{ih} e^{\frac{2\pi i}{h} (w t - \vec{p} \cdot \vec{a})}$$

nous obtenons le système

$$\left[\frac{w}{c} \Lambda_4 + \sum_p \Lambda_p p_p \right] \alpha_{ih} = 0,$$

qui, lorsque la propagation a lieu dans la direction oz ($p_x = p_y = 0$, $p_z \neq 0$), donne les systèmes

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 w' a_{41} + p [a_{13} + a_{31}] = 0 \\ 2 w' a_{42} - p [a_{44} - a_{32}] = 0 \\ 2 w' a_{21} + p [a_{23} - a_{41}] = 0 \\ 2 w' a_{22} - p [a_{24} + a_{42}] = 0 \\ 2 w' a_{33} + p [a_{13} + a_{31}] = 0 \\ 2 w' a_{34} + p [a_{44} - a_{32}] = 0 \\ 2 w' a_{43} - p [a_{23} - a_{41}] = 0 \\ 2 w' a_{44} - p [a_{24} + a_{42}] = 0 \end{array} \right. \quad (II) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{41} - a_{33} = 0 \\ a_{42} + a_{34} = 0 \\ a_{21} + a_{43} = 0 \\ a_{22} - a_{44} = 0 \\ a_{41} - a_{33} = 0 \\ a_{42} + a_{34} = 0 \\ a_{21} + a_{43} = 0 \\ a_{22} - a_{44} = 0 \end{array} \right.$$

On voit immédiatement que le deuxième système est conséquence du premier et que dans celui-ci les ondes

$$a_{43}, \quad a_{31}, \quad a_{44}, \quad a_{32}, \quad a_{23}, \quad a_{41}, \quad a_{24}, \quad a_{42}$$

n'interviennent que par leurs sommes ou leurs différences deux à deux.

Par suite, la solution générale dépendra de huit constantes arbitraires.

Nous poserons

$$\begin{array}{llll} a_{43} = c_1; & a_{31} = c'_1; & a_{44} = c_2; & a_{32} = c'_2 \\ a_{23} = c_3; & a_{41} = c'_3; & a_{21} = c_4; & a_{12} = c'_4 \end{array}$$

d'où

$$a_{44} = a_{33} = -\frac{pc}{2w} [c_1 + c'_1]$$

$$a_{12} = -a_{41} = -\frac{pc}{2w} [c_2 - c'_2]$$

$$a_{21} = -a_{43} = \frac{pc}{2w} [c_3 - c'_3]$$

$$a_{22} = a_{44} = \frac{pc}{2w} [c_4 + c'_4].$$

Mais nous devons remarquer qu'ici nous n'avons plus à titre de condition la relation

$$\frac{w^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2$$

Si, néanmoins, nous admettons cette relation sous la forme $w = pc$ ($w > 0$), la solution du système s'exprime au moyen de seize ondes constantes avec

$$a_{44} = a_{33} = -\frac{1}{2} [c_1 + c'_1]; \quad a_{12} = -a_{41} = \frac{1}{2} [c_2 - c'_2]$$

$$a_{21} = -a_{43} = -\frac{1}{2} [c_3 - c'_3]; \quad a_{22} = a_{44} = \frac{1}{2} [c_4 + c'_4].$$

Ces résultats nous montrent que lorsque la masse est nulle, les solutions de l'équation d'ondes ne peuvent pas être considérées comme limites du cas où la masse tend vers zéro.

Par suite, dans ce cas, la solution ne peut pas être considérée comme un produit des solutions de deux équations de Dirac.

6. Ondes planes monochromatiques solutions de l'équation complémentaire. — Aux systèmes d'équations examinés jusqu'ici nous devons ajouter les systèmes complémentaires.

Nous avons vu que celui-ci s'écrivait dans le cas de masse non nulle

$$\frac{1}{2}[(\bar{\alpha}_1)\delta - (\alpha_1)\bar{\delta}]\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left\{ \sum_p \frac{1}{2}[(\alpha_p)(\bar{\alpha}_4) - (\bar{\alpha}_p)(\alpha_4)]\frac{\partial\psi}{\partial x_p} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c A_0 \right\} \psi,$$

qui dans le cas de l'onde plane

$$\psi_{ik} = b_{ik} e^{\frac{2\pi i}{h} [wt - pz]}$$

donne le système

$$\left[\frac{1}{2}[(\bar{\alpha}_4)\delta - (\alpha_4)\bar{\delta}]\frac{w}{c} + \frac{1}{2}[(\alpha_3)(\bar{\alpha}_4) - (\bar{\alpha}_3)(\alpha_4)]p - m_0 c A_0 \right] b_{ik} = 0,$$

qui développé s'écrit

$$\begin{array}{ll} 2[w' + \lambda] b_{13} - p[b_{11} + b_{33}] = 0 & 2\lambda b_{41} + p[b_{43} - b_{31}] = 0 \\ 2[w' + \lambda] b_{14} + p[b_{12} - b_{34}] = 0 & 2\lambda b_{42} - p[b_{44} + b_{32}] = 0 \\ 2[w' + \lambda] b_{23} - p[b_{21} - b_{43}] = 0 & 2\lambda b_{24} + p[b_{23} + b_{44}] = 0 \\ 2[w' + \lambda] b_{24} + p[b_{22} + b_{44}] = 0 & 2\lambda b_{22} - p[b_{24} - b_{42}] = 0 \\ 2[w' - \lambda] b_{31} - p[b_{11} + b_{33}] = 0 & 2\lambda b_{33} + p[b_{43} - b_{31}] = 0 \\ 2[w' - \lambda] b_{32} - p[b_{12} - b_{34}] = 0 & 2\lambda b_{34} + p[b_{44} + b_{32}] = 0 \\ 2[w' - \lambda] b_{41} + p[b_{21} - b_{43}] = 0 & 2\lambda b_{43} - p[b_{23} + b_{44}] = 0 \\ 2[w' - \lambda] b_{42} + p[b_{22} + b_{44}] = 0 & 2\lambda b_{44} - p[b_{24} - b_{42}] = 0. \end{array}$$

Nous obtenons la solution de ce système sous la forme

$$\begin{array}{ll} b_{11} = b_{33} = c_1; & b_{12} = -b_{31} = c_2 \\ b_{21} = -b_{43} = c_3; & b_{22} = b_{41} = c_4 \\ b_{13} = \frac{p}{\Delta_1} c_1; & b_{11} = -\frac{p}{\Delta_1} c_2 \\ b_{23} = \frac{p}{\Delta_1} c_3; & b_{24} = -\frac{p}{\Delta_1} c_4 \\ b_{31} = \frac{p}{\Delta_2} c_1; & b_{32} = \frac{p}{\Delta_2} c_2 \\ b_{41} = -\frac{p}{\Delta_2} c_3; & b_{42} = -\frac{p}{\Delta_1} c_4. \end{array}$$

Les modules de ces amplitudes sont égaux à ceux des a_{ik} , pris dans un ordre différent.

On peut facilement établir une correspondance (non univoque) entre les a_{ik} et les b_{ik} .

Posant $b_{ik} = S_{ik,lm} a_{lm}$, en comparant les tableaux des a_{ik} et des b_{ik} , on est conduit à

$$S_{ik,lm} = (\alpha_1)_{il} (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)_{km}$$

7. Densité de valeur moyenne. — Ayant établi la forme des solutions de nos différents systèmes d'équations d'ondes, dans le cas d'une onde plane monochromatique, nous sommes maintenant en mesure de calculer les densités de valeur moyenne des principales grandeurs attachées au corpuscule.

Nous avons montré que la grandeur $\psi^* A_4 \psi$, qui se conserve au cours du temps, pouvait être interprétée comme la densité de la probabilité de présence du corpuscule au point considéré.

Si l'on calcule cette densité, on trouve facilement

$$\begin{aligned} \rho &= \psi^* A_4 \psi = p^2 \left[\frac{1}{\Delta_2^2} - \frac{1}{\Delta_4^2} \right] [|C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2] \\ &= 4m_0 \frac{W}{p^2} \left[\sum_i |C_i|^2 \right] \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Interprétant ρ comme une probabilité, nous devons avoir $\int \rho dv = 1$, l'intégrale étant étendue à l'espace entier. Nous en déduisons la condition de normalisation

$$\begin{aligned} 1 &= 4m_0 \frac{W}{p^2} \left[\sum_i |C_i|^2 \right] V \\ \sum_i |C_i|^2 &= \frac{p^2}{4m_0 W}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que cette forme pour la densité conduit à des interprétations cohérentes pour les autres grandeurs introduites.

Nous avons, par exemple

$$\psi^* A_0 \psi = \frac{4m_0^2 c^2}{p^2} \left[\sum |C_i|^2 \right] = m_0 c^2 \frac{\rho}{W}.$$

Nous avons montré antérieurement que cette grandeur est invariante. Si nous intégrons sur les variables x, y, z, t en séparant l'intégration sur le temps, nous obtenons l'intégrale invariante

$$\int \frac{m_0 c^2}{W} dt$$

et si nous tenons compte de la relation relativiste

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \int \psi^* A_0 \psi dv dt = \int \sqrt{1 - \beta^2} dt$$

est identique à une constante près à l'intégrale d'action de la mécanique relativiste du point matériel libre.

Si nous calculons la densité $-c\psi^* A_0 \psi$ que nous avons interprétée comme la composante suivant oz du courant ρu_z , nous obtenons

$$\rho u_z = -c\psi^* A_0 \psi = -\frac{c}{2} \left[A \frac{\Delta_2 \Delta_1}{p} \sum_i |C_{i1}|^2 \right] = \frac{4m_0 c^2}{p} \left[\sum_i |C_{i1}|^2 \right] = \rho \frac{pc^2}{W};$$

d'où la valeur classique

$$u_z = \frac{pc^2}{W}.$$

Il est intéressant d'étudier dans ce cas la représentation du spin.

Nous avons pour composante z de l'opérateur de spin

$$S_z = \frac{\hbar}{2\pi} i (A_1 A_2 - A_2 A_1) = \frac{\hbar}{4\pi} \frac{1}{2} [(i\alpha_1 \alpha_2) \bar{\delta} + (\overline{i\alpha_1 \alpha_2}) \delta].$$

Si nous introduisons la valeur de la matrice

$$(i\alpha_1 \alpha_2)_{kl} = -(-1)^i \delta_{kl}$$

ceci s'écrit

$$S_z = -\frac{\hbar}{2\pi} \frac{1}{2} [(-1)^i + (-1)^k] \hat{\sigma}_l \hat{\sigma}_{km}$$

ce qui nous permet de répartir les différentes valeurs du spin entre les ondes a_{ik} .

En effet, nous avons

1° $(S_z)_{ik,lm} = 0$ si

- a) i pair, k étant impair
- b) i impair, k étant pair,

ce qui a lieu pour les ondes

$$u_{12}, \quad u_{11}, \quad u_{21}, \quad u_{22}, \quad u_{32}, \quad u_{31}, \quad u_{13}, \quad u_{23}$$

dépendant des coefficients C_2 et C_3 ;

2° S_z sera égal à $-\frac{\hbar}{2\pi}$ si l'on a i et k tous deux pairs, c'est-à-dire pour les ondes

$$u_{22}, \quad u_{21}, \quad u_{12}, \quad u_{11}$$

dépendant de C_4 ;

3° S_z sera égal à $+\frac{\hbar}{2\pi}$ si i et k sont tous deux impairs, c'est-à-dire pour les ondes

$$u_{44}, \quad u_{43}, \quad u_{31}, \quad u_{33}$$

dépendant de C_4 .

Si nous calculons maintenant la densité $\psi^* S_z \psi$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \psi^* S_z \psi &= \frac{\hbar}{2\pi} [|C_1|^2 - |C_4|^2] \left[\frac{1}{\Delta_1^2} + \frac{1}{\Delta_2^2} \right] p^2 \\ &= \frac{\hbar}{2\pi} [|C_1|^2 - |C_4|^2] 2 \frac{W^2 + m_0^2 c^4}{W^2 - m_0^2 c^4}. \end{aligned}$$

Le signe de cette grandeur dépend des amplitudes respectives des ondes en C_1 et en C_4 et est indépendant du signe de l'énergie.

Les densités que nous venons de calculer sont relatives à un corpuscule de masse non nulle. Si nous faisons tendre m_0 vers 0, nous voyons que $\rho \rightarrow 0$. Mais cette grandeur n'étant néanmoins pas nulle, nous pouvons toujours l'utiliser pour normaliser, de telle sorte que nous avons toujours, pour la vitesse par exemple, la formule

$$u_z = \frac{pc^2}{W}$$

qui reste finie.

Il est intéressant d'examiner ce qui se passe lorsque le corpuscule est de masse, non plus voisine de zéro, mais nulle.

Nous avons vu que la solution de l'équation d'ondes dépend alors de huit constantes.

En raison des relations qui lient les amplitudes, nous avons alors

$$\psi^* A_1 \psi, \quad - \psi^* A_2 \psi$$

identiquement nuls.

Mais certaines grandeurs ne sont pas nulles.

Nous avons

$$\psi^* S_z \psi = \frac{h}{2\pi} \frac{p^2 c^2}{W^2} [|C_1 + C'_1|^2 - |C_1 - C'_1|^2 + |C_2 - C'_2|^2 + |C_3 - C'_3|^2 + |C_4 + C'_4|^2]$$

De même l'invariant $\psi^* A_0 \psi$ devient

$$\begin{aligned} \psi^* A_0 \psi = \frac{p^2 c^2}{2W^2} [& |C_1 + C'_1|^2 + |C_2 - C'_2|^2 + |C_3 - C'_3|^2 + |C_4 + C'_4|^2] \\ & - \sum_i |C_i|^2 - \sum_i |C'_i|^2 \end{aligned}$$

et si $W = pc$

$$\psi^* A_0 \psi = -\frac{1}{2} [|C_1 - C'_1|^2 + |C_2 + C'_2|^2 + |C_3 + C'_3|^2 + |C_4 - C'_4|^2]$$

expression en général non nulle.

Nous avons vu que les grandeurs formées au moyen des opérateurs de l'équation complémentaire se transforment comme les grandeurs correspondantes de l'équation directe.

Il est intéressant d'examiner leurs densités.

Nous avons, par exemple,

$$\begin{aligned} \psi^* \frac{1}{2} [(\bar{\alpha}_1) \hat{\alpha} - (\alpha_1) \bar{\hat{\alpha}}] \psi &= \sum_{i=1}^4 [|C'_i|^2 - |C_i|^2] \\ \psi^* \frac{1}{2} [(\bar{\alpha}_4) (\alpha_3) - (\alpha_4) (\bar{\alpha}_3)] \psi &= -\frac{pc}{W} \sum_i [|C_i|^2 - |C'_i|^2] \end{aligned}$$

Posant

$$\psi^* \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_4 \hat{\alpha} - \alpha_4 \bar{\hat{\alpha}}) \psi = \rho$$

nous aurons

$$\psi^* \left(\frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1 x_3 - \bar{\alpha}_3 x_1) \right) \psi = \frac{\rho c^2}{W} \bar{\rho}.$$

Ces résultats nous montrent que lorsque la masse est nulle, alors que les grandeurs, densité et vitesse, sont identiquement nulles, il existe néanmoins des grandeurs ayant les mêmes variances, susceptibles des mêmes interprétations et de densités de valeurs moyennes non nulles.

CHAPITRE V

REPRESENTATIONS DU CORPUSCULE DU SECOND TYPE

Nous avons étudié dans le chapitre III le système des équations d'ondes

$$(1) \quad \left[\Gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\pi}{h} m_0 c \right] \psi = 0$$

dans lequel les Γ sont liés par les relations

$$(\Gamma_\mu)^3 = \Gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu = \Gamma_\nu^2 \Gamma_\mu = \Gamma_\mu \Gamma_\nu^2, \quad \Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 0,$$

sans préciser s'il était possible d'obtenir un système de nombre Γ satisfaisant à de telles relations.

De cette équation (1) nous avons déduit une forme dans laquelle le temps est isolé des variables d'espace, tout en étant représenté par une variable réelle, soit

$$(2) \quad A_1 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + x m_0 c \Gamma_0 \psi.$$

Les A , hermitiques, sont ici liés par les relations

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_\mu^3 = A_\mu, \quad A_\mu^2 A_\nu = A_\nu A_\mu^2 = A_\nu \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \\ A_p A_q + A_q A_p = 0, \quad A_p A_4 = A_4 A_p \quad p = 1, 2, 3 \\ A_p \Gamma_0 + \Gamma_0 A_p = 0 \quad \Gamma_0^2 = 1. \end{array} \right.$$

Dans ce chapitre, nous allons considérer des réalisations des systèmes de matrices satisfaisant à ces relations et nous examinerons nos équations d'ondes du chapitre III dans ces cas particuliers.

Nous allons examiner successivement deux réalisations de ce système de matrices, possédant des caractéristiques différentes.

1. Premier type de représentation des Γ . — La représentation la plus simple du système des A que nous ayons pu construire est une représentation du sixième rang.

En particulier, nous pouvons poser

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & -2 & \\ 1 & & 1 \\ & -2 & \\ 1 & & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} & \Gamma_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & i & \\ & i & \\ -i & & -i \\ -i & & -i \\ & i & \\ & i & \end{pmatrix} & \Gamma_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & i & \\ & -i & \\ -i & & -i \\ i & & i \\ & i & \\ & -i & \end{pmatrix} \\ \Gamma_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & -1 & \\ & & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} & \Gamma_5 &= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où nous déduisons le système des A sous la forme

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 2 & \\ 1 & & 1 \\ & 2 & \\ 1 & & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} & A_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & 1 & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & 1 & \end{pmatrix} & A_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & i & \\ & -i & \\ i & & i \\ -i & & -i \\ & i & \\ & -i & \end{pmatrix} \\ A_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & 1 & \\ & -1 & \\ 1 & & 1 \\ -1 & & -1 \\ & 1 & \\ & -1 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Solution onde plane monochromatique. — Si nous considérons le cas particulier de la propagation d'une onde plane monochromatique dans la direction de l'axe des z , écrivant celle-ci sous la forme

$$\psi_R = a_R e^{\frac{2\pi i}{h} (wz - pz)}$$

et en utilisant l'expression des matrices ci-dessus, l'équation (2) donne le système linéaire

$$(4) \quad \left[\frac{w}{c} A_4 - \Gamma_0 m_0 c \right] a_{iR} + A_3 p_3 a_{iR} = 0,$$

qui développé s'écrit

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} w' [a_1 + a_5] - \lambda a_1 + a_3 p_3' = 0 \\ \frac{1}{2} w' [a_2 + a_6] - \lambda a_2 - a_4 p_3' = 0 \\ w' a_3 + \lambda a_3 + [a_1 + a_5] p_3' = 0 \\ w' a_4 + \lambda a_4 - [a_2 + a_6] p_3' = 0 \\ \frac{1}{2} w' [a_1 + a_5] - \lambda a_5 + a_3 p_3' = 0 \\ \frac{1}{2} w' [a_2 + a_6] - \lambda a_6 - a_4 p_3' = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$w' = \frac{w}{c}, \quad \lambda = m_0 c, \quad p_3' = \frac{1}{\sqrt{2}} p_3$$

On voit immédiatement que dans ce système les première et cinquième équations entraînent

$$a_1 = a_5$$

tandis que les deuxième et sixième équations entraînent

$$a_2 = a_6$$

Le système se réduit alors à

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} [w' - \lambda] a_1 + a_3 p_3' = 0 \\ [w' - \lambda] a_2 - a_4 p_3' = 0 \\ [w' + \lambda] a_3 + 2 a_1 p_3' = 0 \\ [w' + \lambda] a_4 - 2 a_2 p_3' = 0. \end{array} \right.$$

Ce système linéaire et homogène ne possède de solutions que lorsque son déterminant

$$[w'^2 - \lambda^2 - p_3^2]^2$$

s'annule, c'est-à-dire lorsque

$$w'^2 - p_3^2 = \lambda^2$$

La solution générale de ce système s'exprime alors au moyen de deux constantes arbitraires pour lesquelles on peut prendre deux quelconques des ondes a_k .

Si nous posons $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, nous tirons des équations précédentes

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} a_4 = a_5 = c_1 \\ a_2 = a_6 = c_2 \\ a_3 = -[w' - \lambda] \frac{c_1}{p} \sqrt{2} = -c_1 \sqrt{2} \frac{p}{\frac{w}{c} + m_0 c} \\ a_4 = [w' - \lambda] \frac{c_2}{p} \sqrt{2} = c_2 \sqrt{2} \frac{p}{\frac{w}{c} + m_0 c} \end{array} \right.$$

On peut essayer de rapprocher la forme de ces résultats de la forme des solutions de l'équation de Dirac en remarquant que la solution précédente peut s'interpréter comme un dédoublement du système des ondes prépondérantes lorsque l'énergie est > 0 .

Nous pouvons au moyen de ces solutions calculer les densités de valeur moyenne pour les principales grandeurs attachées au corpuscule.

Nous trouvons, par exemple,

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \psi^* \Lambda_4 \psi = 4 \frac{w}{c} \frac{1}{\Delta_1} [|G_1|^2 + |G_2|^2] \\ \bar{\psi} c_z &= -c \psi^* \Lambda_3 \psi = 4 \frac{pc}{\Delta_1} [|G_1|^2 + |G_2|^2] = 2 \frac{pc^2}{W} \\ \bar{\psi} \Gamma_0 \psi &= 2 [|G_1|^2 + |G_2|^2] \left(1 - \frac{p^2}{\Delta_1^2} \right) \\ &= 4 [|G_1|^2 + |G_2|^2] \frac{m_0 c}{\Delta_1} = 2 \frac{m_0 c^2}{W} \end{aligned}$$

en accord avec les interprétations données à ces grandeurs.

Ces résultats sont analogues à ceux que l'on obtient en théorie de Dirac et il ne semble pas que, dans les hypothèses faites, il puisse s'introduire de propriétés nouvelles.

Mais il n'en est plus de même si nous supposons la masse nulle, cas qui dans notre théorie ne se raccorde pas avec celui d'une masse infiniment petite.

En effet, dans ce cas du système (5), nous ne pouvons plus déduire $a_1 = a_5$ ni $a_2 = a_6$.

Ce système se réduit aux quatre équations

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} W' (a_1 + a_5) + a_3 p'_3 = 0 \\ \frac{1}{2} W' (a_2 + a_6) - a_4 p'_3 = 0 \\ W' a_3 + (a_1 + a_5) p'_3 = 0 \\ W' a_4 - (a_2 + a_6) p'_3 = 0. \end{array} \right.$$

La solution de ce système dépend alors de quatre paramètres si l'on a encore

$$W^2 - c^2 p^2 = 0.$$

Si l'on pose

$$a_1 = C_1, \quad a_2 = C_2, \quad a_5 = C'_1, \quad a_6 = C'_2$$

on obtient

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{W}{\sqrt{2} cp} (C_1 + C'_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (C_1 + C'_1) \\ a_4 &= +\frac{W}{\sqrt{2} cp} (C_2 + C'_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_2 + C'_2) \end{aligned}$$

lorsque $W = cp$.

La solution du système est alors indépendante de l'énergie et de l'impulsion du corpuscule.

3. Second type de représentation des matrices Γ_v . — Je vais maintenant montrer comment peuvent se construire des

représentations à huit lignes et huit colonnes des matrices liées par les relations

$$(8) \quad (\Gamma_\mu)^2 = \Gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu = \Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 0 \quad \mu = 1, 2, 3, 4.$$

Considérons un système de matrices de Dirac γ_μ telles que

$$\gamma_\mu^2 = 1, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 0$$

et formons la matrice suivante dans une numération à deux séries d'indices i, k, l, m , i et l variant sur les nombres 1, 2, 3, 4, k et m sur 1 et 2 :

$$(\Gamma_\mu)_{ik,lm} = \frac{1}{2}$$

		m	1	2
		l	1 2 3 4	1 2 3 4
k	i			
1	1 2 3 4		$(\gamma_\mu)_{il}$	$(\gamma_\mu)_{il}$
2	1 2 3 4		$(\gamma_\mu)_{il}$	$(\gamma_\mu)_{il}$

Si nous désignons par δ_{km} et σ_{km} les deux matrices

$$\delta_{km} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \sigma_{km} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\sigma_{km}^2 = \delta_{km}$$

nous pouvons écrire

$$(\Gamma_\mu)_{ik,lm} = \frac{1}{2} [(\gamma_\mu)_{il} \delta_{km} + (\gamma_\mu)_{il} \sigma_{km}].$$

Nous allons montrer que $(\Gamma_\mu)_{ik,lm}$ ainsi formée satisfait aux relations (8).

Pour simplifier les calculs, nous surlignons les éléments en km .

Nous avons

$$1^{\circ} \quad (\Gamma_{\mu})^2 = \frac{1}{4} (\delta \bar{\delta} + \delta \bar{\sigma} + \delta \bar{\sigma} + \delta \bar{\delta}) = \frac{1}{2} (\delta \bar{\delta} + \delta \bar{\sigma})$$

$$(\Gamma_{\mu})^3 = \frac{1}{4} (\gamma_{\mu} \bar{\delta} + \gamma_{\mu} \bar{\sigma} + \gamma_{\mu} \bar{\sigma} + \gamma_{\mu} \bar{\delta}) = \frac{1}{2} (\gamma_{\mu} \bar{\delta} + \gamma_{\mu} \bar{\sigma}) = \Gamma_{\mu}.$$

Nous voyons ici que Γ_{μ}^2 n'est pas unitaire ni diagonale et se forme de la même manière avec la matrice δ_{il} que sont formés les Γ_{μ} avec γ_{μ} .

$$2^{\circ} \quad \Gamma_{\nu} \Gamma_{\nu} = \frac{1}{4} (\delta \bar{\delta} + \delta \bar{\sigma}) (\gamma_{\nu} \bar{\delta} + \gamma_{\nu} \bar{\sigma}) = \frac{1}{2} (\gamma_{\nu} \bar{\delta} + \gamma_{\nu} \bar{\sigma}) = \Gamma_{\nu}.$$

$$3^{\circ} \quad \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} = \frac{1}{4} (\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \bar{\delta} + \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \bar{\sigma} + \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \bar{\sigma} + \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \bar{\delta}) = -\Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu}.$$

La seule propriété de $\bar{\sigma}$ qui a été utilisée ici est d'être unitaire $\bar{\sigma}^2 = \delta$.

Nous pourrions écrire d'une manière plus générale

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{2} [(\gamma_{\mu})_{il} (\sigma_1)_{km} + (\gamma_{\mu})_{il} (\sigma_2)_{km}],$$

σ_1 et σ_2 étant deux matrices à deux lignes et deux colonnes telles que

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$$

$$\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1.$$

Nous pouvons alors rattacher le système des équations de Dirac à notre théorie. Celui-ci apparaît comme correspondant au cas particulier où la représentation d'un Γ_{μ} est diagonale (cas que nous avons excepté), obtenue au moyen de

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Dans ce qui suit nous utiliserons la première des déterminations de Γ_{μ} au moyen de δ et σ .

A une matrice Γ_{μ} correspond une matrice $\mathbf{J}_{\mu}$ que nous écrirons

$$(\mathbf{J}_{\mu})_{ik,lm} = \frac{1}{2} [(\gamma_{\mu})_{il} \delta_{km} - (\gamma_{\mu})_{il} \sigma_{km}]$$

et l'on voit facilement que

$$\Gamma_\mu J_\nu = \frac{1}{4} (\gamma_\mu \bar{\delta} + \gamma_\mu \bar{\sigma}) (\gamma_\nu \bar{\delta} - \gamma_\nu \bar{\sigma})$$

$$\frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu \bar{\delta} - \gamma_\mu \gamma_\nu \bar{\sigma} + \gamma_\mu \gamma_\nu \bar{\sigma} - \gamma_\mu \gamma_\nu \bar{\delta}) = 0.$$

La matrice A_0 que nous avons introduite dans notre étude formelle s'écrit ici

$$A_0 = 2\Gamma_0^2 - 1 = 1 - \bar{\delta}\sigma - 1 = -\bar{\delta}\sigma.$$

On voit alors apparaître le mécanisme de la relation

$$A_0 \Gamma_\mu = \Gamma_\mu A_0 = \Gamma_\mu$$

$$A_0 \Gamma_\mu = \frac{1}{2} \bar{\delta}\sigma (\gamma_\mu \bar{\delta} + \gamma_\mu \bar{\sigma}) = \frac{1}{2} (\gamma_\mu \bar{\sigma} + \gamma_\mu \bar{\delta}) = \Gamma_\mu.$$

Nous avons montré précédemment que la séparation des variables s'effectue dans l'équation (2) au moyen de la matrice $\Gamma_0 = \Gamma_4 + J_4$, qui s'écrit

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} (\gamma_4 \bar{\delta} + \gamma_4 \bar{\sigma} + \gamma_4 \bar{\delta} - \gamma_4 \bar{\sigma}) = \gamma_4 \bar{\delta}.$$

En utilisant, à la place des γ , des α de Dirac liés aux γ par les relations

$$\alpha_4 = \gamma_4, \quad \gamma_p = i\alpha_4 \alpha_p, \quad p = 1, 2, 3,$$

nous obtenons

$$A_0 = \Gamma_0 \Gamma_4 = \gamma_4 \bar{\delta} \frac{1}{2} [\gamma_4 \bar{\delta} + \gamma_4 \bar{\sigma}] = \frac{1}{2} [\bar{\delta}\bar{\delta} + \bar{\delta}\bar{\sigma}].$$

A_4 , qui n'est pas unitaire, est la matrice qui, dans notre théorie, joue le rôle d'unité, car on a

$$A_4 = A_\mu^2 \quad \text{et} \quad A_\mu^2 A_\nu = A_\nu.$$

De même

$$A_p = -i A_0 \Gamma_p = \frac{1}{2} [(\alpha_p) \bar{\delta} + (\alpha_p) \bar{\sigma}].$$

Les matrices du système des A sont formées avec les α de la même manière que les Γ sont formés avec des γ .

4. *Solutions ondes planes monochromatiques.* — Nous allons maintenant écrire notre équation d'ondes sous la forme

$$(9) \quad \frac{1}{c} \Lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \Lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c \Gamma_0 \psi$$

et étudier les solutions de cette équation représentables par une onde plane monochromatique.

Si nous prenons pour les α la représentation

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} & i \\ & -i \\ i & \end{vmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} & 1 \\ & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{vmatrix} -1 & & \\ -1 & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

les Λ s'écrivent

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 \\ 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 \\ 1 & & 1 & \end{vmatrix} \quad \Lambda_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} & i & & i \\ & -i & & -i \\ i & & i & \\ & -i & & -i \\ & & i & i \\ & -i & & -i \\ -i & & -i & \end{vmatrix} \quad \Lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} & 1 & & 1 \\ & -1 & & -1 \\ 1 & & 1 & \\ & -1 & & -1 \\ & & 1 & 1 \\ & 1 & & -1 \\ 1 & & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} & 1 & & 1 \\ & 1 & & 1 \\ 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 \\ 1 & & 1 & \end{vmatrix} \quad \Gamma_0 = \begin{vmatrix} -1 & & \\ -1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & -1 & -1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

Si nous considérons une onde plane

$$\psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{h} [20t - pz]}$$

l'équation (9) s'écrit

$$\left(\frac{1}{c} w A_4 + A_3 p - m_0 c \Gamma_0 \right) a_k = 0,$$

qui se développe suivant le système

$$\begin{aligned} (1) \quad & w' [a_1 + a_5] + \lambda' a_1 + p [a_3 + a_7] = 0 \\ (2) \quad & w' [a_2 + a_6] + \lambda' a_2 - p [a_4 + a_8] = 0 \\ (3) \quad & w' [a_3 + a_7] - \lambda' a_3 + p [a_1 + a_5] = 0 \\ (4) \quad & w' [a_4 + a_8] - \lambda' a_4 - p [a_2 + a_6] = 0 \\ (5) \quad & w' [a_1 + a_5] + \lambda' a_5 + p [a_3 + a_7] = 0 \\ (6) \quad & w' [a_2 + a_6] + \lambda' a_6 - p [a_4 + a_8] = 0 \\ (7) \quad & w' [a_3 + a_7] - \lambda' a_7 + p [a_1 + a_5] = 0 \\ (8) \quad & w' [a_4 + a_8] - \lambda' a_8 - p [a_2 + a_6] = 0 \end{aligned}$$

en posant

$$w' = \frac{w}{c} \quad \lambda' = 2\lambda = 2m_0 c.$$

Si nous supposons $\lambda = m_0 c \neq 0$

les équations (1) et (5) donnent $a_1 = a_5$

$$\text{id.} \quad (2) \text{ et } (6) \quad \text{id.} \quad a_2 = a_6$$

$$\text{id.} \quad (3) \text{ et } (7) \quad \text{id.} \quad a_3 = a_7$$

$$\text{id.} \quad (4) \text{ et } (8) \quad \text{id.} \quad a_4 = a_8.$$

Le système précédent se réduit alors aux quatre équations

$$[w' + \lambda] a_1 + p a_3 = 0$$

$$[w' + \lambda] a_2 - p a_4 = 0$$

$$[w' - \lambda] a_3 + p a_1 = 0$$

$$[w' - \lambda] a_4 - p a_2 = 0.$$

Ces équations sont celles qui déterminent dans le cas d'une onde plane monochromatique les amplitudes des ondes solutions des équations de Dirac.

Il est important de remarquer que ce couplage des ondes ψ deux à deux a lieu pour les solutions ψ et non seulement pour les ondes planes. Il en résulte que dans tous les cas, même en

présence d'un champ extérieur, les solutions de notre système sont celles des équations de Dirac.

Dans le cas de l'onde plane, on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= A, & \alpha_4 &= B \\ \alpha_1 &= -\frac{pA}{\frac{\hbar c}{c} + m_0 c}, & \alpha_2 &= \frac{pB}{\frac{\hbar c}{c} + m_0 c}. \end{aligned}$$

Mais le couplage deux à deux des solutions de nos équations ne s'effectue que si la masse est différente de zéro.

Si $m_0 = 0$, le système des huit équations précédentes se réduit au système

$$\begin{aligned} \hbar' [\alpha_1 + \alpha_5] + p [\alpha_3 + \alpha_7] &= 0 \\ \hbar' [\alpha_2 + \alpha_6] - p [\alpha_4 + \alpha_8] &= 0 \\ \hbar' [\alpha_3 + \alpha_7] + p [\alpha_1 + \alpha_5] &= 0 \\ \hbar' [\alpha_4 + \alpha_8] - p [\alpha_2 + \alpha_6] &= 0. \end{aligned}$$

Tandis que dans le cas de l'équation de Dirac, supposer $m_0 = 0$ n'introduisait pas d'indétermination nouvelle, ici, $m_0 = 0$ introduit dans la solution onde plane deux paramètres supplémentaires, celle-ci se représentant en fonction de quatre constantes arbitraires.

Si nous supposons que la relation $c^2 p^2 = w^2$ est encore valable, en posant

$$\alpha_3 = c_1 \quad \alpha_7 = c'_1 \quad \alpha_4 = c_2 \quad \alpha_8 = c'_2$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{p c}{\hbar'} c_1 & \alpha_5 &= -\frac{p c}{\hbar'} c'_1 \\ \alpha_2 &= \frac{p c}{\hbar'} c_2 & \alpha_6 &= \frac{p c}{\hbar'} c'_2 \end{aligned}$$

Solution qui se subdivise en deux cas selon que $w = +cp$ ou $w = -cp$. Si $w = cp$, celle-ci se réduit à

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= c_1 & \alpha_7 &= c'_1 & \alpha_4 &= c_2 & \alpha_8 &= c'_2 \\ \alpha_1 &= -c_1 & \alpha_5 &= -c'_1 & \alpha_2 &= c_2 & \alpha_6 &= c'_2 \end{aligned}$$

Mais si la relation $w^2 = c^2 p^2$ n'est plus vérifiée, les troisième et quatrième équations ne sont plus conséquence des deux premières et l'on a alors

$$a_1 + a_5 = -\frac{p c}{w} (a_3 + a_7) = -\frac{w'}{p c} (a_3 + a_7);$$

d'où

$$a_3 + a_7 = 0 \quad a_4 + a_5 = 0$$

et de même

$$a_4 + a_8 = 0 \quad a_2 + a_6 = 0.$$

La solution générale s'écrit alors

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_5 = c_1 & a_2 &= -a_6 = c_2 \\ a_3 &= -a_7 = c_3 & a_4 &= -a_8 = c_4. \end{aligned}$$

5. Densités de valeur moyenne. — Si nous examinons les densités de valeur moyenne des grandeurs formées au moyen des matrices Γ ou A dans le cas où la masse est différente de zéro, en raison du couplage entre les a , on voit facilement que celles-ci vont se trouver égales au double de la valeur de la densité correspondante de la théorie de Dirac.

Mais si nous introduisons dans ces expressions la valeur de la densité de présence, nous obtiendrons exactement les mêmes expressions pour toutes les densités de valeur moyenne qu'en théorie de Dirac.

Les grandeurs complémentaires que nous avons vues être toujours des invariants sont, ainsi qu'on le voit facilement, toujours identiquement nulles.

Ces résultats ne s'étendent évidemment pas au cas où la masse est nulle.

Dans ce cas nous avons, par exemple,

$$\begin{aligned} \rho &= \psi^* \Lambda_1 \psi = \sum_{i=1,2} |G_i + G'_i|^2 \\ \rho c_z &= -c \psi^* \Lambda_3 \psi = c \left[\sum_i (G_i + G'_i)^2 \right] = c \rho; \end{aligned}$$

d'où

$$c_z = c.$$

Lorsque la masse est nulle, la vitesse est rigoureusement égale à c , quels que soient l'énergie ou l'impulsion.

De même pour la composante z du spin, nous trouvons une valeur différente de zéro :

$$S_z = \frac{h}{4\pi} \psi^* [i A_1 A_2] \psi = \frac{h}{4\pi} [|C_1 + C'_1|^2 - |C_2 + C'_2|^2].$$

Les grandeurs complémentaires ne sont ici plus nulles.

Nous avons

$$\psi^* (A_4)_c \psi = \sum_{i=1,2} |C_i - C'_i|^2 \quad - \quad c \psi^* (A_3)_c \psi = c \sum_{i=1,2} |C_i - C'_i|^2.$$

CHAPITRE VI

ETUDE SUR LA FUSION DES MATRICES DE DIRAC

Dans le chapitre IV, nous avons utilisé comme matrices fondamentales de notre théorie des matrices dérivées des matrices de Dirac par l'opération de fusion, soit fusion symétrique, soit fusion antisymétrique, au moyen d'un opérateur $\hat{\sigma}$.

Si l'on considère l'ensemble des matrices que l'on peut rencontrer dans cette théorie, on voit qu'elles seront toutes obtenues par une opération de fusion symétrique ou antisymétrique, l'opérateur $\hat{\sigma}$ étant remplacé par une des matrices de Dirac.

Dans ce qui suit, modifiant les notations que nous avons utilisées jusqu'ici, nous désignerons par A_{μ} ou K_{μ} des matrices obtenues par combinaison de quatre matrices d'un système de Dirac, ces combinaisons étant rendues hermitiques, lorsque cela est nécessaire, par l'adjonction d'un facteur i . On sait qu'il existe 16 telles matrices.

Nous nous proposons d'étudier maintenant les systèmes des matrices

$$(\mathcal{A})_{il,lm} = \frac{1}{2} [(A)_{il}(K)_{km} + (K)_{il}(A)_{km}]$$

et

$$(\mathcal{B})_{il,lm} = \frac{1}{2} [(A)_{il}(K)_{km} - (K)_{il}(A)_{km}].$$

Pour simplifier les notations, nous désignerons par A une matrice $(A)_{il}$ dont les éléments sont repérés par les indices i, l , et par $\overline{K}$ une matrice $(K)_{km}$ dont les éléments varient avec k et m .

Nous devons, en outre, remarquer que les seules propriétés que nous utiliserons pour les matrices A ou K seront d'être

unitaires et de commuter ou d'anticommutter. Il en résulte que les propriétés que nous déduirons seront indépendantes du signe introduit *a priori* devant les matrices A ou K , ce qui fait que ces propriétés seront également valables, et pour les matrices de notre théorie, et pour celles de la théorie du photon de M. Louis de Broglie.

1. *Étude d'un système* $\mathfrak{A}$. — Nous nous proposons d'étudier le système des matrices $\mathfrak{A}$ de la forme

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} (A\bar{K} + K\bar{A}),$$

dans lequel A est une quelconque des 16 matrices de Dirac, (K exceptée), variable, tandis que K est une matrice que nous supposerons bien déterminée. Ce système A comprend donc 15 matrices.

Les A et K étant unitaires, nous avons

$$A^2 = \delta, \quad K^2 = \delta, \quad \bar{A}^2 = \bar{\delta}, \quad \bar{K}^2 = \bar{\delta}$$

et l'on voit facilement que

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A})^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [(AK)(\bar{K}\bar{A}) + (KA)(\bar{A}\bar{K})] \\ (\mathfrak{A})^3 &= \frac{1}{2} \mathfrak{A} + \frac{1}{8} [K\bar{A} + (AKA)(\bar{K}\bar{A}\bar{K}) + (KAK)(\bar{A}\bar{K}\bar{A}) + A\bar{K}]. \end{aligned}$$

Nous avons ici deux cas à considérer :

1° A et K ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{K}$ commutent

$$AK = KA, \quad \bar{A}\bar{K} = \bar{K}\bar{A}, \quad AKA = K, \quad KAK = A.$$

2° A et K anticommulent

$$AK = -KA, \quad \bar{A}\bar{K} = -\bar{K}\bar{A}, \quad AKA = -K, \quad KAK = -A.$$

Mais, dans ces deux cas, nous avons

$$\mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A};$$

d'où le théorème :

Les matrices

$$\frac{1}{2}(\overline{AK} + K\overline{A}) = \mathfrak{A},$$

obtenues par fusion symétrique à partir des matrices de Dirac, satisfont toutes à la relation $\mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A}$.

Un calcul identique montre qu'il en est de même pour les matrices

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}(\overline{AK} - \overline{A}K)$$

obtenues par fusion antisymétrique et qui satisfont toutes à la relation

$$\mathfrak{B}^3 = \mathfrak{B}.$$

Ces relations nous montrent que l'équation caractéristique des matrices $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ est

$$\lambda^3 - \lambda = 0.$$

Leurs valeurs propres sont donc 0, + 1, - 1.

Nous verrons plus loin une interprétation de l'origine de ces valeurs propres.

Considérons maintenant deux matrices du système $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2}(\overline{AK} + \overline{A}K) \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2}(\overline{BK} + \overline{B}K).$$

D'après ce qui précède, nous avons

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}[(AK)(\overline{KA}) + (KA)(\overline{AK})]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(AK)(\overline{AK}) & \text{si} \quad AK = KA \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(AK)(\overline{AK}) & \text{si} \quad AK = -KA. \end{array} \right.$$

Soit $\mathfrak{K}$ la matrice $(AK)(\overline{AK}) = (KA)(\overline{KA})$.

Nous avons

$$\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{A}_2 \pm \mathfrak{A}_2 \mathfrak{K}$$

$$\mathfrak{A}_1^2 \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2} \mathfrak{A}_2 \pm \mathfrak{K} \mathfrak{A}_2$$

Or

$$\mathcal{K} \mathcal{Q}_2 = \frac{1}{2} [(\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{B}) \overline{\mathcal{A}} + \mathcal{A} (\overline{\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{B}})]$$

$$\mathcal{Q}_2 \mathcal{K} = \frac{1}{2} [(\mathcal{B}\mathcal{K}\mathcal{A}) \overline{\mathcal{A}} + \mathcal{A} (\overline{\mathcal{B}\mathcal{K}\mathcal{A}})];$$

d'où

$$\begin{array}{ll} \mathcal{K} \mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_2 \mathcal{K} & \text{si} \quad \mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{K}\mathcal{A} \\ \mathcal{Q}_2 \mathcal{K} = -\mathcal{Q}_2 \mathcal{K} & \text{si} \quad \mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{B} = -\mathcal{B}\mathcal{K}\mathcal{A}, \end{array}$$

ce qui nous donne les relations

$$\begin{array}{ll} a) & \text{si} \quad \mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{K}\mathcal{A} \\ & \mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1^2 = \mathcal{Q}_1^2 \mathcal{Q}_2 \\ b) & \text{si} \quad \mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{B} = -\mathcal{B}\mathcal{K}\mathcal{A} \\ & \mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1^2 + \mathcal{Q}_1^2 \mathcal{Q}_2 = 0. \end{array}$$

Cette dernière relation, multipliée à droite et à gauche par $\mathcal{Q}_1$, en tenant compte de

$$(\mathcal{Q}_1)^3 = \mathcal{Q}_1$$

donne

$$\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1 = 0.$$

Nous retrouvons ici, comme cas particulier, les matrices de de Broglie envisagées précédemment, car si l'on fait $\mathcal{K} = \partial$, les conditions des cas *a*) et *b*) se ramènent à

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}\mathcal{B} = -\mathcal{B}\mathcal{A}.$$

Si $\mathcal{A} = \alpha_p$, $\mathcal{B} = \alpha_q$, la relation $\alpha_p \alpha_q + \alpha_q \alpha_p = 0$ nous conduit au cas (*b*).

2. Étude des matrices de deux systèmes $\mathcal{Q}$. — Nous pourrions généraliser le cas précédent en considérant deux matrices $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ appartenant à deux systèmes différents :

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{1}{2} (\mathcal{A}\overline{\mathcal{K}} + \overline{\mathcal{A}\mathcal{K}}), \quad \mathcal{Q}_2 = \frac{1}{2} (\mathcal{B}\overline{\mathcal{L}} + \overline{\mathcal{B}\mathcal{L}}).$$

Nous avons, comme précédemment,

$$\mathcal{Q}_1^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \mathcal{K}) & \text{si} \quad \mathcal{A}\mathcal{K} = \mathcal{K}\mathcal{A} \\ \frac{1}{2} (1 - \mathcal{K}) & \text{si} \quad \mathcal{A}\mathcal{K} = -\mathcal{K}\mathcal{A} \end{cases}$$

$$\text{avec } \mathcal{K} = (\mathcal{A}\mathcal{K}) (\overline{\mathcal{A}\mathcal{K}}).$$

Pour étudier les combinaisons de $\mathfrak{A}_1^2$ et de $\mathfrak{A}_2$, il nous faut étudier les combinaisons $\mathcal{K} \mathfrak{A}_2$ ou $\mathfrak{A}_2 \mathcal{K}$.

Or

$$2\mathcal{K}\mathfrak{A}_2 = (\text{AKB}) (\overline{\text{AKL}}) + (\text{AKL}) (\overline{\text{AKB}})$$

$$2\mathfrak{A}_2\mathcal{K} = (\text{BAK}) (\overline{\text{LAK}}) + (\text{LAK}) (\overline{\text{BAK}}).$$

Par suite, nous aurons

$$\mathfrak{A}_2\mathcal{K}_2 = \mathfrak{A}_2\mathcal{K} \quad \text{si} \quad (\text{AK}) \text{B} (\text{AK}) \text{L} = \text{B} (\text{AK}) \text{L} (\text{AK})$$

$$\mathcal{K}\mathfrak{A}_2 = -\mathfrak{A}_2\mathcal{K} \quad \text{si} \quad (\text{AK}) \text{B} (\text{AK}) \text{L} = -\text{B} (\text{AK}) \text{L} (\text{AK}).$$

Or

$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{A}_2 \pm \mathfrak{A}_2\mathcal{K}$$

$$\mathfrak{A}_1^2\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2} \mathfrak{A}_2 \pm \mathcal{K}\mathfrak{A}_2$$

d'où

$$a) \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1^2 = \mathfrak{A}_1^2\mathfrak{A}_2 \quad \text{si} \quad (\text{AK}) \text{B} (\text{AK}) \text{L} = \text{B} (\text{AK}) \text{L} (\text{AK}).$$

$$b) \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_1^2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2 \quad \text{si} \quad (\text{AK}) \text{B} (\text{AK}) \text{L} = -\text{B} (\text{AK}) \text{L} (\text{AK}).$$

Les matrices $\mathfrak{A}$ sont liées par les mêmes relations dans les mêmes conditions.

Ces résultats peuvent se rassembler dans le tableau (I).

Il est intéressant de montrer que ces relations sont transitives, c'est-à-dire que l'on peut y permuter les indices 1 et 2.

TABLEAU I.

	B commute avec AK	B anticommuté avec AK
L commute avec AK	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1^2 = \mathfrak{A}_1^2\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_1^2 = \mathfrak{I}_1^2\mathfrak{I}_2$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_1^2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_1^2 + \mathfrak{I}_1^2\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}_2$
L anticommuté avec AK	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_1^2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_1^2 + \mathfrak{I}_1^2\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}_2$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1^2 = \mathfrak{A}_1^2\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{I}_2\mathfrak{I}_1^2 = \mathfrak{I}_1^2\mathfrak{I}_2$

La relation

$$(1) \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1^2 = \mathfrak{A}_1^2\mathfrak{A}_2$$

est réalisée si l'on a

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} B(AK) = (AK)B \\ L(AK) = (AK)L \end{array} \right. \text{ et } \quad \text{ou} \quad (3) \left\{ \begin{array}{l} B(AK) = -(AK)B \\ L(AK) = -(AK)L \end{array} \right. \text{ et}$$

Pour que l'on ait en même temps que (1)

$$(4) \quad \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2^2 = \mathfrak{A}_2^2 \mathfrak{A}_1,$$

il faut que l'on ait également

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} A(BL) = (BL)A \\ K(BL) = (BL)K \end{array} \right. \text{ et } \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} A(BL) = -(BL)A \\ K(BL) = -(BL)K \end{array} \right. \text{ et}$$

Si l'on envisage les cas du tableau (II) :

TABLEAU II.

		LA = AL				LA = -AL			
		LK	KL	LK	KL	LK	KL	LK	KL
BA --AB	BK =KB	1		2		5		6	
	BK --KB	3		4		7		8	
BA --AB	BK =KB	9		10		13		14	
	BK --KB	11		12		15		16	

les relations (2) et (3) sont vérifiées dans les cas

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 11 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 5 \\ 15 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 10 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 8 \\ 14 \end{array}$$

les relations (5) et (6) dans les cas

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 14 \\ 15 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 10 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 8 \\ 11 \end{array}$$

Il y a donc toujours transitivité pour la relation (1).

Il en est de même pour la relation

$$\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_1^2 \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2$$

réalisée dans les cas

$$\left\{ \begin{array}{cc} 2 & 12 \\ 6 & 16 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{cc} 3 & 9 \\ 7 & 13 \end{array} \right.$$

tandis que la relation réciproque

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_2^2 \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1$$

correspond aux cas

$$\left\{ \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 13 & 6 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{cc} 6 & 9 \\ 7 & 12 \end{array} \right.$$

3. Liaisons entre produits de deux matrices. — Considérons deux matrices du même système

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2} [\mathbf{A} \overline{\mathbf{K}} + \mathbf{K} \overline{\mathbf{A}}] \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2} [\mathbf{B} \overline{\mathbf{K}} + \mathbf{K} \overline{\mathbf{B}}];$$

nous aurons

$$\begin{aligned} 4 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 &= [(\mathbf{A} \mathbf{B}) \overline{\delta} + (\mathbf{A} \mathbf{K}) (\overline{\mathbf{K} \mathbf{B}}) + (\mathbf{K} \mathbf{B}) (\overline{\mathbf{A} \mathbf{K}}) + \delta (\overline{\mathbf{A} \mathbf{B}})] \\ 4 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 &= [(\mathbf{B} \mathbf{A}) \overline{\delta} + (\mathbf{B} \mathbf{K}) (\overline{\mathbf{K} \mathbf{A}}) + (\mathbf{K} \mathbf{A}) (\overline{\mathbf{B} \mathbf{K}}) + \delta (\overline{\mathbf{B} \mathbf{A}})]. \end{aligned}$$

On voit facilement que

$$1^\circ \quad \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1$$

si l'on a

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A}$$

et

$$\text{soit } \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{B} \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{B} \\ \text{et} \\ \mathbf{A} \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{A} \end{array} \right., \quad \text{soit } \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{B} \mathbf{K} = - \mathbf{K} \mathbf{B} \\ \text{et} \\ \mathbf{A} \mathbf{K} = - \mathbf{K} \mathbf{A}. \end{array} \right.$$

$\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ doivent commuter entre eux, et tous les deux, soit commuter, soit anticommuter avec $\mathbf{K}$.

$$2^\circ \quad \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 = 0$$

si l'on a

$$\mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A} = 0$$

et

$$\text{soit } \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{A} \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{A} \\ \text{et} \\ \mathbf{B} \mathbf{K} = - \mathbf{K} \mathbf{B} \end{array} \right., \quad \text{soit } \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{A} \mathbf{K} = - \mathbf{K} \mathbf{A} \\ \text{et} \\ \mathbf{B} \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{B}. \end{array} \right.$$

A et B doivent anticommutter entre eux, et l'un commuter, l'autre anticommutter avec K.

Dans ces deux cas, on a $AKB = BKA$, relation qui entraîne, ainsi que nous l'avons vu antérieurement,

$$\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1^2 = \mathfrak{A}_1^2 \mathfrak{A}_2.$$

Plus généralement, si nous examinons les produits $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ et $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1$, dans le cas où $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ appartiennent à deux systèmes différents, nous obtenons

$$4 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = (AB)(\overline{KL}) + (KL)(\overline{AB}) + (AL)(\overline{KB}) + (KB)(\overline{AL})$$

$$4 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 = (BA)(\overline{LK}) + (\overline{BA})(LK) + (BK)(\overline{LA}) + (LA)(\overline{BK})$$

On voit alors facilement que $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ sont liés par la relation

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1$$

dans les cas 1, 8, 10, 15 du tableau (II) et par la relation

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 = 0$$

dans les cas 4, 5, 11, 14.

Les relations

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1$$

et

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 = 0$$

sont donc réalisées dans les cas où nous avons

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2^2 = \mathfrak{A}_2^2 \mathfrak{A}_1$$

et sont incompatibles avec la relation

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_2^2 \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1$$

Cette dernière relation fait intervenir quand elle est réalisée des relations de commutation ou d'anticommutation entre groupes de trois matrices. Nous n'examinerons pas ces combinaisons dont nous avons vu un exemple dans le cas particulier de la fusion par δ sous la forme de la relation

$$\mathfrak{C}_p \mathfrak{C}_q \mathfrak{C}_r + \mathfrak{C}_r \mathfrak{C}_q \mathfrak{C}_p = 0.$$

Nous allons maintenant examiner les rapports existant entre les matrices $\mathfrak{A}$ et les matrices $\mathfrak{J}$.

THÉORÈME. — *Les matrices*

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}\overline{\mathbf{K}} + \mathbf{K}\overline{\mathbf{A}}] \quad \text{et} \quad \mathfrak{J} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}\overline{\mathbf{K}} - \mathbf{K}\overline{\mathbf{A}}]$$

sont complémentaires.

En effet,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{J} = \frac{1}{4} [1 - (\mathbf{A}\mathbf{K})(\overline{\mathbf{K}\mathbf{A}}) + (\mathbf{K}\mathbf{A})(\overline{\mathbf{A}\mathbf{K}}) - 1] = 0.$$

THÉORÈME. — *Les deux matrices $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{J}$ sont liées par les relations*

$$1^{\circ} \quad \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{J}^2 = 1$$

$$2^{\circ} \quad \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{J}^2 = \pm (\mathbf{A}\mathbf{K})(\overline{\mathbf{A}\mathbf{K}}),$$

les signes (+) et (−) correspondant aux cas

$$(\mathbf{A}\mathbf{K}) = (\mathbf{K}\mathbf{A}) \quad \text{et} \quad (\mathbf{A}\mathbf{K}) = -(\mathbf{K}\mathbf{A}).$$

Les relations $\mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{J}^3 = \mathfrak{J}$ donnent alors

$$\mathfrak{A} = \pm \mathfrak{A}(\mathbf{A}\mathbf{K})(\overline{\mathbf{A}\mathbf{K}}) \quad \mathfrak{J} = \mp \mathfrak{J}(\mathbf{A}\mathbf{K})(\overline{\mathbf{A}\mathbf{K}})$$

et

$$\mathfrak{A} = \pm (\mathbf{A}\mathbf{K})(\overline{\mathbf{A}\mathbf{K}})\mathfrak{A} \quad \mathfrak{J} = \mp (\mathbf{A}\mathbf{K})(\overline{\mathbf{A}\mathbf{K}})\mathfrak{J};$$

d'où le théorème :

Étant donné un système de seize matrices dans lequel la fusion a été opérée au moyen d'une matrice $\mathbf{K}$, il existe un autre système, fondé au moyen de la matrice $\mathbf{A}$, ayant en commun avec le premier la matrice $\frac{1}{2}(\mathbf{A}\overline{\mathbf{K}} + \mathbf{K}\overline{\mathbf{A}})$.

Néanmoins, si le premier système est totalement hermitique, le deuxième système ne peut jamais l'être.

4. Généralisation des matrices $\mathfrak{A}$. — Nous allons maintenant revenir sur la construction des $\mathfrak{A}$, de manière à mettre en évidence l'origine des valeurs propres 0 et ± 1 de celles-ci.

Pour cela, nous allons considérer les matrices A_i et K_j de

$$\mathfrak{A}_{ij} = \frac{1}{2} [A_i \overline{K_j} + \overline{A_i} K_j]$$

satisfaisant aux relations plus générales

$$[A_i]^2 = g_{ii} \quad [K_j]^2 = g_{jj}$$

et, lorsqu'ils anticommulent, liés par

$$A_i K_j + K_j A_i = 2g_{ij}$$

Si nous calculons $(\mathfrak{A}_{ij})^2$, nous avons

$$\begin{aligned} 4(\mathfrak{A}_{ij})^2 &= A_i^2 \overline{K_j^2} + (A_i K_j)(\overline{K_j A_i}) + (K_j A_i)(\overline{A_i K_j}) + K_j^2 \overline{A_i^2} \\ &\quad 2g_{ii} g_{jj} + (A_i K_j)(\overline{K_j A_i}) + (K_j A_i)(\overline{A_i K_j}). \end{aligned}$$

Nous devons alors considérer deux cas :

$$\begin{aligned} a) \quad & A_i K_j + K_j A_i = 2g_{ij} \\ b) \quad & A_i K_j = K_j A_i \end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{aligned} a) \quad & 4(\mathfrak{A}_{ij})^2 = 2g_{ii} g_{jj} + 2g_{ij}[(A_i K_j) \overline{\delta} + (\overline{A_i K_j}) \delta] - 2(A_i K_j)(\overline{A_i K_j}) \\ b) \quad & 4(\mathfrak{A}_{ij})^2 = 2g_{ii} g_{jj} + 2(A_i K_j)(\overline{A_i K_j}). \end{aligned}$$

Si nous calculons maintenant $(\mathfrak{A}_{ij})^3$, nous obtenons

$$\begin{aligned} a) \quad & 8(\mathfrak{A}_{ij})^3 = g_{ii} g_{jj} \mathfrak{A}_{ij} + (g_{ij})^2 \mathfrak{A}_{ij} - \frac{1}{2} g_{ii} g_{ij} K_j \overline{K_j} - \frac{1}{2} g_{jj} g_{ij} A_i \overline{A_i}; \\ b) \quad & 8(\mathfrak{A}_{ij})^3 = 4g_{ii} g_{jj} \mathfrak{A}_{ij} + 2g_{ii} g_{jj} K_j \overline{A_i} + 2g_{jj} g_{ii} A_i \overline{K_j} = 8g_{ii} g_{jj} \mathfrak{A}_{ij}. \end{aligned}$$

Dans le cas (a), nous n'avons pas de relation directe entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}^3$; il faut élever $\mathfrak{A}$ à la quatrième puissance, ce qui donne

$$(\mathfrak{A}_{ij})^4 = (\mathfrak{A}_{ij})^2 [g_{ii} g_{jj} + (g_{ij})^2] - g_{ii} g_{jj} (g_{ij})^2.$$

Nous obtenons ainsi les équations de Cayley relatives aux matrices $\mathfrak{A}_{ij}$ dans les deux cas (a) et (b).

Le cas (b) donne

$$\lambda^3 - g_{ii} g_{jj} \lambda = 0;$$

d'où

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \pm \sqrt{g_{ii}g_{jj}}$$

tandis que le cas (a) donne

$$\lambda^4 - [g_{ii}g_{jj} + (g_{ij})^2]\lambda^2 + g_{ii}g_{jj}(g_{ij})^2 = 0;$$

d'où

$$\lambda = \pm \sqrt{g_{ii}g_{jj}}$$

et

$$\lambda = \pm g_{ij}.$$

Nous voyons que dans ce cas (auquel correspondent les matrices **A** du chapitre IV) les valeurs doubles des racines 0 du cas euclidien proviennent des valeurs doubles g_{ij} .

CHAPITRE VII

ETUDE SUR LA VARIABLE DE SPIN

Dans ce qui suit, nous allons reprendre plus en détail l'examen de l'introduction de la variable de spin dans la représentation d'un corpuscule pour lequel les états propres de spin sont $\pm \frac{h}{2\pi}$ et 0. Nous étudierons ensuite la théorie correspondant à ce cas, analogue de la théorie approximative qu'a donnée Pauli pour le cas de l'électron.

1. Introduction de la variable de spin. — Aux moments de rotation classiques, la mécanique quantique fait correspondre des opérateurs, qui s'écrivent

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = -\frac{h}{2\pi i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ m_2 = -\frac{h}{2\pi i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ m_3 = -\frac{h}{2\pi i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{array} \right.$$

et qui sont liés par les relations que l'on déduit par permutations circulaires de

$$(2) \quad (m_1 m_2 - m_2 m_1) = \frac{h}{2\pi i} m_3.$$

L'idée fondamentale qui préside à l'introduction du spin est que le moment cinétique total du corpuscule n'est pas complètement représenté par la grandeur correspondant à l'opérateur $\vec{m}$ et doit être représenté par une somme de la forme

$$\vec{N} = \vec{m} + \vec{S}.$$

$\vec{S}$ sera l'opérateur de spin.

Si l'on suppose que la relation (2) est encore valable, à la fois pour le moment cinétique total $\vec{N}$ et pour le moment $\vec{m}$, on aura

$$(m_1 + S_1)(m_2 + S_2) - (m_2 + S_2)(m_1 + S_1) = \frac{h}{2\pi i} (m_3 + S_3),$$

ce qui donne

$$(3) \quad S_1 S_2 - S_2 S_1 = \frac{h}{2\pi i} S_3.$$

Cette relation n'introduit aucune hypothèse sur les valeurs propres du spin.

Si l'on envisage un corpuscule dont le spin est susceptible de prendre les valeurs

$$+ \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} \quad \text{et} \quad - \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$$

(ce qui correspond, par exemple, au cas de l'électron), on pourra écrire

$$\vec{S} = \frac{h}{4\pi} \vec{\sigma},$$

$\vec{\sigma}$ étant un opérateur matriciel à trois composantes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ dont les valeurs propres seront -1 et $+1$. Par suite, nous aurons

$$\vec{\sigma}^2 = 1.$$

La relation (3) s'écrira alors

$$\left(-\frac{h}{4\pi}\right)^2 (\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1) = -\frac{h}{2\pi i} \frac{h}{4\pi} \sigma_3;$$

d'où

$$(4) \quad \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = 2i \sigma_3.$$

On construit facilement un système de trois matrices à deux lignes et deux colonnes, satisfaisant aux trois relations déduites de (4) par permutations circulaires.

Ce sont les trois matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Les relations (4), qui, développées, s'écrivent

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = 2i \sigma_3 & \sigma_1^2 = 1 \\ \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2 = 2i \sigma_1 & \text{et} \quad \sigma_2^2 = 1 \\ \sigma_3 \sigma_1 - \sigma_1 \sigma_3 = 2i \sigma_2 & \sigma_3^2 = 1 \end{cases}$$

entraînent pour les σ les relations nécessaires, mais non pas suffisantes :

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_3 = 0. \end{cases}$$

Rappelons la démonstration que donne Dirac de ces relations :

$$\begin{aligned} 2i[\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1] &= [2i \sigma_1] \sigma_2 + \sigma_2 [2i \sigma_1] \\ &= [\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2] \sigma_2 + \sigma_2 [\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2] \\ &= \sigma_2^2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2^2 = 0. \end{aligned}$$

2. Spin d'un corpuscule de Bose. — Nous allons maintenant chercher à étendre cette théorie du spin au cas où le corpuscule suit la statistique de Bose en possédant un spin dont les valeurs propres sont

$$0, \quad +\frac{h}{2\pi}, \quad -\frac{h}{2\pi}.$$

Posant

$$\vec{S} = -\frac{h}{2\pi} \vec{\sigma},$$

où $\vec{\sigma}$ est cette fois un opérateur matriciel ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) dont les valeurs propres sont 0, +1, -1 et par suite satisfait à la relation

$$\vec{\sigma}^2 = \vec{\sigma};$$

remplaçant $\tilde{S}$ par $-\frac{h}{2\pi} \tilde{\tau}$ dans les relations (3), on obtient

$$\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = i \sigma_3.$$

Nous avons donc, au lieu du système (4), le système

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_4 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_4 = i \sigma_3 & \sigma_4^2 = \sigma_1 \\ \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2 = i \sigma_4 & \sigma_2^2 = \sigma_2 \\ \sigma_3 \sigma_1 - \sigma_1 \sigma_3 = i \sigma_2 & \sigma_3^2 = \sigma_3 \end{array} \right.$$

Nous allons voir que ces relations entraînent entre les σ des relations que nous avons déjà rencontrées.

Si nous calculons la grandeur

$$\begin{aligned} i[\sigma_1 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_1] &= [i \sigma_1] \sigma_2^2 + \sigma_2^2 [i \sigma_1] \\ &= [\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2] \sigma_2^2 + \sigma_2^2 [\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2] \\ &= \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 - \sigma_2^2 \sigma_3 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2 \end{aligned}$$

nous obtenons

$$i[\sigma_1 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_1] = i \sigma_4 + \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 - \sigma_2^2 \sigma_3 \sigma_2$$

Si l'on a $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 = 0$, cette relation se réduit à

$$(7) \quad \sigma_4 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_4 = \sigma_4$$

Or, $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 = 0$ se déduit de la relation analogue à (7) :

$$\sigma_3 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3 = \sigma_3$$

par multiplication à droite et à gauche par σ_2 . Par suite, la relation (7) est conséquence du système (6).

De même, nous avons la combinaison

$$\begin{aligned} i[\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1] &= [i \sigma_1] [\sigma_2 \sigma_3] + [\sigma_3 \sigma_2] [i \sigma_1] \\ &= [\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2] \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 [\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2] \\ &= -\sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_3 = 0. \end{aligned}$$

Les relations (6) entraînent donc entre les σ les relations

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\sigma_p)^3 = \sigma_p & \sigma_p \sigma_q^2 + \sigma_q^2 \sigma_p = \sigma_p \\ p = 1, 2, 3 & \sigma_p \sigma_q \sigma_r + \sigma_r \sigma_q \sigma_p = 0. \end{array} \right.$$

Ces relations nécessaires ne sont évidemment pas suffisantes.

Nous devons maintenant montrer que si nous considérons les trois σ comme les composantes d'un vecteur dans un espace à trois dimensions, les relations (8) auxquelles ils satisfont dans un premier système de référence sont encore satisfaites dans un deuxième système déduit du premier par une rotation du système des axes de coordonnées.

Pour ceci, nous posons

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= l_1\sigma_1 + m_1\sigma_2 + n_1\sigma_3, \\ \sigma'_2 &= l_2\sigma_1 + m_2\sigma_2 + n_2\sigma_3, \\ \sigma'_3 &= l_3\sigma_1 + m_3\sigma_2 + n_3\sigma_3,\end{aligned}$$

les l, m, n étant les cosinus directeurs des nouveaux axes par rapport aux anciens.

Un calcul assez long montre que

$$\begin{aligned}(\sigma'_1)^3 &= [l_1\sigma_1 + m_1\sigma_2 + n_1\sigma_3]^3 \\ &= l_1[l_1^2 + m_1^2 + n_1^2]\sigma_1 + m_1[m_1^2 + n_1^2 + l_1^2]\sigma_2 \\ &+ n_1[n_1^2 + l_1^2 + m_1^2]\sigma_3 = l_1\sigma_1 + m_1\sigma_2 + n_1\sigma_3 = \sigma'_1\end{aligned}$$

et l'on vérifie de la même façon la conservation des autres relations du système (8) entre les σ'_p .

3. Construction des $\tilde{\sigma}$. — Nous devons maintenant montrer qu'il existe effectivement des systèmes de trois matrices $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ satisfaisant au système des relations (8).

Nous allons construire de telles matrices.

A cet effet nous désignerons par σ_0^p les matrices de Pauli introduites précédemment dans le cas du spin $\pm \frac{h}{4\pi}$ et telles que

$$\begin{aligned}\sigma_0^p \sigma_0^q - \sigma_0^q \sigma_0^p &= 2i\sigma_0^r \\ \sigma_0^p \sigma_0^q + \sigma_0^q \sigma_0^p &= 0 \quad (\sigma_0^p)^2 = 1.\end{aligned}$$

Nous allons montrer que les matrices

$$(\Lambda_p)_{ik,lm} = \frac{1}{2} [(\sigma_0^p)_{il} \delta_{km} + (\sigma_0^p)_{km} \delta_{il}]$$

satisfont aux relations

$$\begin{aligned}\Lambda_p \Lambda_q - \Lambda_q \Lambda_p &= i \Lambda_r \\ (\Lambda_p)^3 &= \Lambda_p.\end{aligned}$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\Lambda_p \Lambda_q &= \frac{1}{4} [(\sigma_0^p \sigma_0^q)_{il} \hat{\sigma}_{km} + (\sigma_0^p \sigma_0^q)_{km} \hat{\sigma}_{il} + (\sigma_0^p)_{il} (\sigma_0^q)_{km} + (\sigma_0^q)_{il} (\sigma_0^p)_{km}] \\ \Lambda_q \Lambda_p &= \frac{1}{4} [(\sigma_0^q \sigma_0^p)_{il} \hat{\sigma}_{km} + (\sigma_0^q \sigma_0^p)_{km} \hat{\sigma}_{il} + (\sigma_0^q)_{il} (\sigma_0^p)_{km} + (\sigma_0^p)_{il} (\sigma_0^q)_{km}];\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Lambda_p \Lambda_q - \Lambda_q \Lambda_p &= \frac{1}{4} [(\sigma_0^p \sigma_0^q - \sigma_0^q \sigma_0^p)_{il} \hat{\sigma}_{km} + (\sigma_0^p \sigma_0^q - \sigma_0^q \sigma_0^p)_{km} \hat{\sigma}_{il}] \\ &= \frac{1}{2} i [(\sigma_0^r)_{il} \hat{\sigma}_{km} + (\sigma_0^r)_{km} \hat{\sigma}_{il}] = i \Lambda_r.\end{aligned}$$

L'opération qui nous a conduit des σ_0 aux Λ est l'opération de fusion symétrique que nous avons étudiée précédemment.

Nous voyons que cette opération conduit des matrices de spin $\pm \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2\pi}$ aux matrices de spin 0, $\pm \frac{\hbar}{2\pi}$.

Nous avons donc là un premier procédé nous permettant de construire des matrices satisfaisant aux conditions que nous nous sommes imposées.

Si nous prenons un des σ_0 , soit σ_0^3 , sous la forme diagonale

$$\sigma_0^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

nous pouvons l'écrire

$$(\sigma_0^3)_{il} = -(-1)^i \hat{\sigma}_{il} \quad (i = 1, 2).$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}(\Lambda_3)_{ik,lm} &= -\frac{1}{2} [(-1)^i \hat{\sigma}_{il} \hat{\sigma}_{km} + (-1)^k \hat{\sigma}_{km} \hat{\sigma}_{il}]; \\ &= \frac{1}{2} [(-1)^i + (-1)^k] \hat{\sigma}_{il} \hat{\sigma}_{km};\end{aligned}$$

nous voyons alors sur cette expression que Λ_3 est diagonale et que, si i et k sont tous deux pairs ou tous deux

impairs, $A_3 = -1$ ou $A_3 = +1$, tandis que si l'un des indices i ou k est pair, l'autre étant impair, l'élément correspondant de A_3 est nul.

La matrice A_3 présentera donc autant d'états zéro que d'états $+1$ et d'états -1 réunis.

Nous avons, ici, obtenu les A au moyen de l'opération de fusion symétrique. Nous pouvons de même utiliser la fusion antisymétrique en posant

$$(A'_p)_{ik,lm} = \frac{1}{2}[(\sigma'_0)_{il}\delta_{km} - (\sigma'_0)_{km}\delta_{il}].$$

Il est intéressant de rapprocher l'opération qui nous a conduit aux A de la manière dont sont construites les matrices de Dirac.

Pour obtenir ces matrices, qui forment un système de quatre nombres α_μ liés par les relations

$$\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu},$$

Dirac introduit deux systèmes de trois matrices à quatre lignes et quatre colonnes, l'un σ , l'autre ρ , tels que

$$\sigma_\mu\sigma_\nu + \sigma_\nu\sigma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$$

$$\rho_\mu\rho_\nu + \rho_\nu\rho_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$$

$$\sigma_\mu\rho_\nu = \rho_\nu\sigma_\mu.$$

Le système des α_ν s'obtient alors au moyen des combinaisons

$$\alpha_1 = \rho_1\sigma_1, \quad \alpha_2 = \rho_1\sigma_2, \quad \alpha_3 = \rho_1\sigma_3, \quad \alpha_4 = \rho_3.$$

Pour construire deux systèmes ρ et σ , liés par les relations ci-dessus, Dirac a utilisé les matrices de Pauli :

$$(\sigma_0^l)_{il}, \quad (i, l = 1, 2),$$

et les a étendues par fusion (non symétrique) sous la forme

$$(\sigma_1)_{ik,lm} = (\sigma_0^1)_{il}\delta_{km} \quad (\rho_1)_{ik,lm} = (\sigma_0^1)_{km}\delta_{il}$$

$$(\sigma_2)_{ik,lm} = (\sigma_0^2)_{il}\delta_{km} \quad (\rho_2)_{ik,lm} = (\sigma_0^2)_{km}\delta_{il}$$

$$(\sigma_3)_{ik,lm} = (\sigma_0^3)_{il}\delta_{km} \quad (\rho_3)_{ik,lm} = (\sigma_0^3)_{km}\delta_{il}$$

i, k, l, m variant sur 1 et 2; les α sont des matrices du quatrième rang, obtenues par des produits $\bar{\rho} \bar{\sigma}$, tandis que nous obtenons une représentation de nos matrices A_p ou A'_p par les sommes ou différences

$$A_p = \frac{1}{2} (\sigma_p + \varphi_p); \quad A'_p = \frac{1}{2} (\sigma_p - \varphi_p).$$

La construction de nos matrices de spin par fusion nous a conduit, comme nous l'avons vu, à des états purs 0 en nombre égal à la somme des états purs différents de zéro.

Nous pouvons également nous proposer de construire des représentations de nos σ de telle sorte que l'état zéro y entre avec la même fréquence que les autres états $+1$ et -1 .

Le cas le plus simple d'une telle représentation est celui où nos σ sont du troisième rang.

Dans une représentation diagonale pour σ_3 , nous construisons facilement le système

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{vmatrix} \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} & -i & \\ i & & \\ & & i \end{vmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{vmatrix}$$

et l'on vérifie que ces σ sont bien liés par les relations

$$\begin{aligned} (\sigma_i)^3 &= \sigma_i & \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i &= i \sigma_k \\ \sigma_i^2 \sigma_j + \sigma_j \sigma_i^2 &= \sigma_j & \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j \sigma_i &= 0. \end{aligned}$$

Mais on peut voir facilement que cette représentation n'est pas unique.

Nous avons obtenu ici $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en superposant par addition les matrices σ_0 de Pauli suivant le schéma

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{vmatrix} \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} & -i & \\ i & & \\ & & i \end{vmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{vmatrix}$$

Nous obtenons une deuxième représentation en conservant σ_3 et en déterminant σ'_1 et σ'_2 par différence des σ_0 correspondants

$$\sigma'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} & 1 \\ 1 & -1 \\ & -1 \end{vmatrix} \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} & -i \\ i & \\ & i \\ & -i \end{vmatrix} \quad \sigma'_3 = \begin{vmatrix} & 1 \\ & 0 \\ & -1 \end{vmatrix}$$

4. Introduction du spin en mécanique non relativiste. — Nous allons maintenant étudier l'introduction du spin dans l'opérateur d'évolution de la fonction d'onde dans le cas non relativiste.

Nous admettons que l'influence du spin se manifeste par la présence d'un terme additif supplémentaire dans l'hamiltonien classique, ce terme étant de la forme

$$\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 + \sigma_3 A_3,$$

le grandeur **A** ayant la variance d'un vecteur.

Il en résulte que si **H** est l'hamiltonien classique du système, l'équation d'ondes de celui-ci s'écrira, si nous introduisons le spin,

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = H \psi_k + \frac{h}{2\pi} [\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 + \sigma_3 A_3] \psi_k.$$

Pour justifier cette forme de l'équation d'ondes, nous devons montrer que si le système d'axes subit une rotation d'espace, nous pouvons conserver la forme de cette équation en faisant subir aux ψ_k une substitution linéaire.

De l'équation ci-dessus on déduit l'équation adjointe

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \psi_k^+ = \psi_k^+ H + \psi_k^+ \frac{h}{2\pi} [\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 + \sigma_3 A_3],$$

l'opérateur **H** étant self-adjoint et les **A** réels.

Ces deux équations nous donnent une équation de conservation densité-courant avec un terme supplémentaire.

Si nous considérons maintenant une transformation de coordonnées

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu,$$

si les équations ci-dessus conservent leurs formes, appliquées à une fonction

$$\psi' = S\psi \quad \text{ou} \quad \psi'^+ = \psi^+ S^{-1},$$

nous aurons successivement

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi'_k}{\partial t} = H' \psi'_k + \frac{\hbar}{2\pi} \sum_{\mu} \sigma_{\mu} \Lambda'_{\mu} \psi'_k;$$

or

$$\Lambda'_{\mu} = \alpha_{\mu\nu} \Lambda_{\nu};$$

d'où

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} S \psi_k = H' S \psi_k + \frac{\hbar}{2\pi} \left[\sum_{\mu} \sum_{\nu} \alpha_{\mu\nu} \sigma_{\mu} \Lambda_{\nu} \right] S \psi_k;$$

or

$$S^{-1} H' S = H;$$

d'où

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = H \psi_k + \frac{\hbar}{2\pi} \left[\sum_{\mu} \sum_{\nu} S^{-1} \alpha_{\mu\nu} \sigma_{\mu} \Lambda_{\nu} S \right] \psi_k.$$

Pour que cette équation se ramène à la première, il faut que nous puissions trouver S tel que

$$\alpha_{\mu\nu} S^{-1} \sigma_{\mu} S = \sigma_{\nu},$$

où

$$S^{-1} \sigma_{\mu} S = \alpha_{\mu\nu} \sigma_{\nu}.$$

Pour trouver une solution de cette équation, nous allons chercher la transformation infinitésimale S correspondant à une rotation infinitésimale

$$\alpha_{\mu\nu} = I + \varepsilon_{\mu\nu} \alpha_{\nu} \quad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$$

$$S = I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

et en remplaçant

$$\sigma_{\mu} T_{\lambda\nu} - T_{\lambda\nu} \sigma_{\mu} = \delta_{\lambda\mu} \sigma_{\nu} - \delta_{\nu\mu} \sigma_{\lambda}$$

qui admet, comme on le voit facilement, la solution

$$T_{\lambda\nu} = \sigma_{\lambda} \sigma_{\nu} - \sigma_{\nu} \sigma_{\lambda} = i \sigma_{\mu};$$

d'où la transformation infinitésimale

$$S = I + \frac{1}{2} \sum_{(\mu\nu)} \varepsilon_{(\mu\nu)} i \sigma_{\lambda}.$$

A la rotation finie

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \theta_1 - x_2 \sin \theta_1 \\ x'_2 &= x_1 \sin \theta_1 + x_2 \cos \theta_1 \end{aligned}$$

correspond donc la transformation finie

$$S_1 = e^{i \tau_3 \theta}$$

A la rotation

$$\begin{aligned} x'_2 &= x_2 \cos \theta_2 - x_3 \sin \theta_2 \\ x'_3 &= x_2 \sin \theta_2 + x_3 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

correspond la transformation

$$S_2 = e^{i \tau_4 \theta_2} = \cos \sigma_1 \theta_2 + i \sin \sigma_1 \theta_2.$$

Connaissant la transformation subie par ψ_k dans ces deux cas, nous en déduirons par combinaison la transformation correspondant à une rotation quelconque du système d'axes.

5. Application au cas du corpuscule au repos dans un champ magnétique uniforme. — Pour illustrer cette théorie du spin, nous allons maintenant traiter en détail l'analogie du cas, étudié par Pauli, de l'électron au repos placé dans un champ magnétique uniforme, pour le cas où le corpuscule soumis au champ possède un spin $0, \pm \frac{h}{2\pi}$.

Nous allons d'abord considérer le cas où les matrices de spin de notre corpuscule sont représentées par le système

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} & 1 \\ 1 & \\ & 1 \end{vmatrix}; \quad \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} & -i \\ i & \\ & -i \end{vmatrix}; \quad \tau_3 = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

Si notre corpuscule est au repos dans un système OXYZ et y est soumis au champ magnétique H dirigé suivant oz , posant

$$\mu_0 = \frac{eh}{2\pi m_0 c},$$

la fonction hamiltonienne totale se réduira à

$$\mu_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{H};$$

d'où le système des équations d'ondes

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 H \psi_1 = E \psi_1 \\ \mu_0 H \psi_2 = 0 \\ \mu_0 H \psi_3 = -E \psi_3. \end{array} \right.$$

Ce système n'admet de solutions différentes de 0 que si l'on a

$$E = \mu_0 H, \quad E = 0 \quad \text{ou} \quad E = -\mu_0 H.$$

Si nous supposons le système des ψ normé par la condition

$$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 = 1,$$

nous obtenons immédiatement les solutions

$$1^\circ \quad E = \mu_0 H$$

$$\psi_1 = e^{i\beta_1}, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0$$

$$2^\circ \quad E = 0$$

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = e^{i\beta_2}, \quad \psi_3 = 0$$

$$3^\circ \quad E = -\mu_0 H$$

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = e^{i\beta_3}$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ étant trois facteurs de phase arbitraires.

Par suite, on peut dire qu'à la valeur propre $+\mu_0 H$ de l'énergie correspond une onde en ψ_1 ; à la valeur propre 0 une onde en ψ_2 et à la valeur propre $-\mu_0 H$ une onde en ψ_3 .

Si nous considérons maintenant un deuxième système de référence OXYZ tel que Oz fasse un angle θ avec la direction du champ H, la fonction hamiltonienne classique sera maintenant remplacée par la fonction

$$\mu_0 (\vec{\sigma} \cdot \vec{H}) = \mu_0 (\sigma_x H_x + \sigma_y H_y + \sigma_z H_z);$$

d'où le système des équations d'ondes

$$\mu_0 (H_x \sigma_x + H_y \sigma_y + H_z \sigma_z) \psi_k = E \psi_k$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} \mu_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (H_x - iH_y) \psi_2 + H_z \psi_1 \right] &= E \psi_1 \\ \mu_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (H_x + iH_y) \psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x - iH_y) \psi_3 \right] &= E \psi_2 \\ \mu_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (H_x + iH_y) \psi_2 - H_z \psi_3 \right] &= E \psi_3. \end{aligned}$$

Pour que ce système d'équations linéaires et homogènes admette une solution différente de zéro, il faut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \mu_0 H_z - E & \frac{\mu_0}{\sqrt{2}} (H_x - iH_y) & 0 \\ \frac{\mu_0}{\sqrt{2}} (H_x + iH_y) & -E & \frac{\mu_0}{\sqrt{2}} (H_x - iH_y) \\ 0 & \frac{\mu_0}{\sqrt{2}} (H_x + iH_y) & -\mu_0 H_z - E \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne, en développant,

$$E [\mu_0^2 (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) - E^2] = 0.$$

Nous retrouvons les conditions

$$E = +\mu_0 H, \quad E = 0, \quad E = -\mu_0 H.$$

Nous allons chercher les fonctions ψ solutions du système des équations d'ondes dans ces trois cas.

1° $E = +\mu_0 H$.

Le système initial s'écrit

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x - iH_y) \psi_2 + (H_z - H) \psi_1 = 0 \\ 2) \quad & \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x + iH_y) \psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x - iH_y) \psi_3 - H \psi_2 = 0 \\ 3) \quad & \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x + iH_y) \psi_2 - (H_z + H) \psi_3 = 0. \end{aligned}$$

Les première et troisième équations donnent

$$\frac{\psi_2}{\psi_1} = \frac{\sqrt{2}(\Pi_x - \Pi)}{H_x - iH_y} \quad \frac{\psi_2}{\psi_3} = \frac{\sqrt{2}(\Pi_x + i\Pi)}{H_x + iH_y}$$

et l'on voit facilement que dans ces conditions l'équation (2) est identiquement satisfaite.

Soit H_p , la composante de H normale à Oz et soit α un arc tel que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H_y}{H_x}$; on aura

$$\begin{aligned} \frac{\psi_2}{\psi_1} &= \frac{\sqrt{2}(\Pi - \Pi_z)}{H_x^2 + H_y^2} (H_x + iH_y) & \sqrt{2} \frac{(\Pi - \Pi_z)}{H_p} e^{-i\alpha} \\ \frac{\psi_2}{\psi_3} &= \frac{\sqrt{2}(\Pi + \Pi_z)}{H_x^2 + H_y^2} (H_x - iH_y) & \sqrt{2} \frac{(\Pi + \Pi_z)}{H_p} e^{+i\alpha} \end{aligned}$$

Or

$$H_x = H \cos \theta \quad H_p = H \sin \theta;$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\psi_2}{\psi_1} &= \sqrt{2} \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} e^{-i\alpha} = \sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{-i\alpha} \\ \frac{\psi_2}{\psi_3} &= \sqrt{2} \frac{(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} e^{+i\alpha} = \sqrt{2} \cotg \frac{\theta}{2} e^{+i\alpha}. \end{aligned}$$

Si les ψ sont normalisés par la condition

$$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 = 1,$$

on en tire

$$|\psi_2|^2 = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + 1 \right)^2} = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2};$$

d'où la solution des équations d'ondes

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi + \alpha)} \\ \psi_2 &= \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \\ \psi_3 &= \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi - \alpha)} \end{aligned}$$

φ étant un arc arbitraire.

2° $E = 0$.

Le système des équations d'ondes s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x - iH_y) \psi_2 + H_z \psi_1 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x + iH_y) \psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x - iH_y) \psi_3 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x + iH_y) \psi_2 - H_z \psi_3 = 0, \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\frac{\psi_2}{\psi_1} = -\frac{H_z \sqrt{2}}{H_x - iH_y}; \quad \frac{\psi_3}{\psi_1} = \frac{H_z \sqrt{2}}{H_x + iH_y};$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_2}{\psi_1} = -H_z \sqrt{2} \frac{(H_x + iH_y)}{H_x^2 + H_y^2} = -\frac{H_z \sqrt{2}}{H_p} e^{i\varphi} = \sqrt{2} \cos \theta e^{i\varphi} \\ \frac{\psi_3}{\psi_1} = H_z \sqrt{2} \frac{(H_x - iH_y)}{H_x^2 + H_y^2} = \frac{H_z \sqrt{2}}{H_p} e^{-i\varphi} = \sqrt{2} \cos \theta e^{-i\varphi} \end{array} \right.$$

et d'après

$$\begin{aligned} |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 &= 1 \\ |\psi_2|^2 (1 + \cos^2 \theta) &= 1; \quad \psi_2 = \cos \theta e^{i\varphi}; \end{aligned}$$

d'où le système de solutions

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i(\varphi+\pi)} \\ \psi_2 = \cos \theta e^{i\varphi} \\ \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i(\varphi-\pi)}. \end{array} \right.$$

3° $E = -\mu_0 H$.

Le système

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x - iH_y) \psi_2 + (H_z + H) \psi_1 &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x + iH_y) \psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x - iH_y) \psi_3 + H \psi_2 &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H_x + iH_y) \psi_2 - (H_z - H) \psi_3 &= 0 \end{aligned}$$

donne

$$\begin{aligned}\frac{\psi_2}{\psi_1} &= -\frac{(\Pi_z + \Pi) \sqrt{2}}{\Pi_x + i \Pi_y} = -\sqrt{2} \frac{(\Pi_z + \Pi)}{\Pi_r} e^{-i\varphi} \\ \frac{\psi_3}{\psi_1} &= \frac{(\Pi_z - \Pi) \sqrt{2}}{\Pi_x + i \Pi_y} = \sqrt{2} \frac{(\Pi_z - \Pi)}{\Pi_r} e^{+i\varphi};\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\psi_2}{\psi_1} &= -\sqrt{2} \frac{(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} e^{-i\varphi} = -\sqrt{2} \cot \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \frac{\psi_3}{\psi_1} &= -\sqrt{2} \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} e^{+i\varphi} = -\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{+i\varphi}.\end{aligned}$$

La condition de normalisation donne alors

$$|\psi_2|^2 = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right)^2}; \quad \psi_2 = \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi};$$

d'où la solution

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi + \alpha)} \\ \psi_2 &= \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \\ \psi_3 &= -\cos^2 \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi - \alpha)}.\end{aligned}$$

Ces résultats peuvent se rassembler dans le tableau :

	ψ_1	ψ_2	ψ_3
$E = +\mu_0 H$	$\cos^2 \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi_1 + \alpha)}$	$\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi_1}$	$\sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi_1 - \alpha)}$
$E = 0$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i(\varphi_2 + \alpha)}$	$\cos \theta e^{i\varphi_2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i(\varphi_2 - \alpha)}$
$E = -\mu_0 H$	$-\sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi_3 + \alpha)}$	$\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi_3}$	$-\cos^2 \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi_3 - \alpha)}$

La solution de l'équation d'ondes est donc toujours bien définie à un facteur de phase près.

Nous allons maintenant faire un calcul analogue dans le cas où les matrices σ sont obtenues par fusion à partir des matrices de Pauli. Nous avons déjà montré que ce procédé introduisait deux états 0 pour un état $+1$ et un état -1 . Nous allons voir que dans ce cas s'introduit également, pour l'énergie $E=0$, une indétermination nouvelle sur les fonctions d'ondes.

Nous avons le système de matrices :

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} & 1 & 1 \\ 1 & & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad S_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -i & -i \\ i & -i \\ i & -i \\ i & i \end{vmatrix} \quad S_3 = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \\ & & & -1 \end{vmatrix}$$

Dans un premier système d'axes, l'équation d'ondes s'écrit

$$\mu_0 S_3 H \psi_k = E \psi_k,$$

système d'équations linéaires et homogènes qui n'admet de solutions différentes de zéro que si

$$1^\circ E = \mu_0 H, \quad 2^\circ E = -\mu_0 H \quad 3^\circ E = 0.$$

Dans le premier cas, $E = +\mu_0 H$, on trouve facilement

$$\psi_1 = e^{i\beta_1}, \quad \psi_2 = 0 \quad \psi_3 = 0 \quad \psi_4 = 0.$$

Dans le deuxième cas, $E = -\mu_0 H$,

$$\psi_1 = 0 \quad \psi_2 = 0 \quad \psi_3 = 0 \quad \psi_4 = e^{i\beta_4}$$

Mais dans le troisième cas, le système se réduisant à

$$\begin{array}{ll} 1) & -\mu_0 H \psi_1 = 0 \quad \psi_1 = 0 \\ 2) & 0 = 0 \quad \psi_2 \text{ arbitraire} \\ 3) & 0 = 0 \quad \psi_3 \text{ arbitraire} \\ 4) & -\mu_0 H \psi_4 = 0 \quad \psi_4 = 0, \end{array}$$

la condition de normalisation

$$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 = 1$$

donne

$$|\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 = 1.$$

Les ondes ψ_2 et ψ_3 dépendront donc, en plus des phases, d'un paramètre.

Résolvant symétriquement, nous aurons, par exemple,

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \sin \varphi e^{i\beta_2} & \varphi, \beta_2, \beta_3 \\ \psi_3 &= \cos \varphi e^{i\beta_3} & \text{arbitraires.}\end{aligned}$$

Ces résultats s'interprètent en disant qu'à la valeur propre de l'énergie $E = +\mu_0 H$ correspond l'onde en ψ_1 ; à la valeur propre $-\mu_0 H$, l'onde en ψ_4 , mais qu'on ne peut séparer les ondes relatives aux valeurs zéro, dont les modules sont liés.

Si nous considérons un deuxième système de référence dans lequel l'axe OZ fait l'angle θ avec la direction du champ H, la fonction hamiltonienne s'écrit

$$\mu_0(\vec{S} \cdot \vec{H}) = \mu_0(S_x H_x + S_y H_y + S_z H_z);$$

d'où le système des équations d'ondes

$$\mu_0(H_x S_1 + H_y S_2 + H_z S_3) \psi_k = E \psi_k$$

qui se développe sous la forme :

$$\begin{aligned}1) \quad & \mu_0 \left[\frac{1}{2} (H_x - i H_y) (\psi_2 + \psi_3) + H_z \psi_1 \right] = E \psi_1 \\ 2) \quad & \mu_0 \left[\frac{1}{2} (H_x + i H_y) \psi_1 + \frac{1}{2} (H_x - i H_y) \psi_4 \right] = E \psi_2 \\ 3) \quad & \mu_0 \left[\frac{1}{2} (H_x + i H_y) \psi_1 + \frac{1}{2} (H_x - i H_y) \psi_4 \right] = E \psi_3 \\ 4) \quad & \mu_0 \left[\frac{1}{2} (H_x + i H_y) (\psi_2 + \psi_3) - H_z \psi_4 \right] = E \psi_4.\end{aligned}$$

Ces équations n'admettent de solutions que si leur déterminant est nul, c'est-à-dire si

$$E^2 \{ E^2 - \mu_0^2 H^2 \} = 0;$$

d'où

$$E = 0, \quad E = +\mu_0 H, \quad E = -\mu_0 H.$$

Dans le cas où $E = +\mu_0 H$, on peut déterminer toutes les ondes ψ en introduisant un seul paramètre sous la forme d'un facteur de phase φ_1 .

Les relations (2) et (3) donnant $\psi_2 = \psi_3$, on trouve facilement le système des solutions

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi_1 + \alpha)} \\ \psi_2 = \psi_3 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi_1} \\ \psi_4 &= \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi_1 - \alpha)}.\end{aligned}$$

De même, dans le cas $E = -\mu_0 H$, on a encore $\psi_2 = \psi_3$; d'où les solutions

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi_1 - \alpha)} \\ \psi_2 = \psi_3 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi_1} \\ \psi_4 &= -\cos^2 \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi_1 + \alpha)}.\end{aligned}$$

Dans ces deux cas, les ondes relatives aux états O, ψ_2 et ψ_3 ont la même valeur, c'est-à-dire que la probabilité de trouver le spin O est la même, que le corpuscule ait l'énergie $\mu_0 H$ ou l'énergie $-\mu_0 H$.

Dans le cas où $E = 0$, la résolution ne peut plus se faire de la même manière.

En effet, le système des équations d'ondes s'écrit

$$\begin{aligned}(1) \quad & \frac{1}{2} (H_x - iH_y) (\psi_2 + \psi_3) + H_z \psi_1 = 0 \\ (2) \text{ et } (3) \quad & \frac{1}{2} (H_x + iH_y) \psi_1 + \frac{1}{2} (H_x - iH_y) \psi_4 = 0 \\ (4) \quad & \frac{1}{2} (H_x + iH_y) (\psi_2 + \psi_3) - H_z \psi_4 = 0,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{2} (\psi_2 + \psi_3) \operatorname{tg} \theta e^{+i\gamma} \\ \psi_4 &= \frac{1}{2} (\psi_2 + \psi_3) \operatorname{tg} \theta e^{+i\gamma}\end{aligned}$$

Les ondes ψ_2 et ψ_3 restent alors arbitraires sous la condition de normalisation.

On peut résoudre symétriquement en posant

$$\begin{aligned}\psi_2 + \psi_3 &= c e^{i\gamma} & \psi_2 &= c \cos \gamma \\ \psi_3 &= i c \sin \gamma.\end{aligned}$$

On obtient alors la solution

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} e^{i(\varphi_3 + \gamma - \alpha)} \\ \psi_2 &= \sqrt{2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} \cos \gamma e^{i\varphi_3} \\ \psi_3 &= \sqrt{2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} i \sin \gamma e^{i\varphi_3} \\ \psi_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} e^{i(\varphi_3 + \gamma - \alpha)}.\end{aligned}$$

La valeur zéro pour l'énergie nécessite donc, lorsqu'elle se présente deux fois, l'introduction d'un nouveau paramètre dans la solution. Ce cas est à rapprocher de l'indétermination analogue que nous avons rencontrée dans la solution de l'équation d'ondes du corpuscule possédant un état de masse propre nulle deux fois plus fréquent que les états de masse $+m_0$ ou m_0 , au chapitre IV.

BIBLIOGRAPHIE

I. — Généralités en mécanique ondulatoire.

1. LOUIS DE BROGLIE, *La quantification dans la nouvelle mécanique*. (Paris, Hermann, 1932.)
2. JORDAN, *Elementare Quantenmechanik*. (Berlin, Springer, 1930.)

II. — Sur l'équation de Dirac.

1. P. A. M. DIRAC, *The principles of quantum mechanics*. (2^e édition, Oxford, 1935.)
2. LOUIS DE BROGLIE, *L'électron magnétique* (Paris, Hermann, 1933) et *Cours professé à l'Institut Henri Poincaré*, 1932-1933.
3. H. WEYL, *The theory of groups and quantum mechanics*. (Londres, Methuen, 1931.)
4. PROCA, *Thèse*. (Paris, 1933.)
5. W. PAULI, *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, dans HANDBUCH DER PHYSIK, Band XXIV/1.

III. — Sur l'équation du photon.

1. LOUIS DE BROGLIE, *Sur la nature du photon*, dans C. R., 198, p. 135.
2. IDEM, *L'équation d'ondes du photon*, dans C. R., 199, p. 445.
3. IDEM, *Sur l'expression de la densité dans la nouvelle théorie du photon*, dans C. R., 199, p. 1165.
4. IDEM, *Une nouvelle conception de la lumière*. (Paris, Hermann, 1934.)
5. IDEM, *Cours professé à l'Institut Henri Poincaré*, 1935-1936.
6. LOUIS DE BROGLIE et J. WINTER, *Sur le spin du photon*, dans C. R., 199, p. 813.
7. G. PETIAU, *Sur les matrices de la théorie du photon*, dans C. R., 200, p. 375.
8. IDEM, *Sur une forme de l'équation du photon*, dans C. R., 200, p. 1829.

IV. — Sur la théorie du spin.

En plus des ouvrages cités précédemment.

1. W. PAULI, *Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons*, dans ZEIT. F. PHYSIK, 43, p. 607.
-

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Théorie de la largeur naturelle des raies spectrales

Vu et approuvé :

Paris, le 10 juillet 1936

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN.

Vu
et Permis d'imprimer,

**Le Recteur de l'Académie
de Paris,**

S. CHARLÉTY.

Imprimé en Belgique